Correction du devoir surveillé de mathématiques du 05/04/14

Exercice 1

Question	Sujet A	Sujet B	Sujet C	Sujet D
1	a	b	c	d
2	b	c	a	c
3	c	b	a	d
4	c	b	c	a

- La forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$ est $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc celle de $(1+\mathrm{i})^4$ est $\sqrt{2}^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{4}}$ soit $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
  On pouvait aussi remarquer que $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ donc $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = -4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-1+\mathrm{i}| = \left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$. Alors,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |z-1+\mathrm{i}|^2 = \left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|^2 \Leftrightarrow |x+\mathrm{i}y-1+\mathrm{i}|^2 = \sqrt{3}^2 + (-1)^2$$
$$\Leftrightarrow |(x-1)+\mathrm{i}(y+1)|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

- Soit (Z_n) la suite de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+\mathrm{i}$ et $Z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = |Z_{n+1}| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n\right| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right||Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$$

  donc (U_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on conclut que (U_n) converge vers 0.
- Soit A, B et C les trois points du plan complexe d'affixes respectives $Z_{\mathrm{A}} = -1-\mathrm{i}$, $Z_{\mathrm{B}} = 2-2\mathrm{i}$ et $Z_{\mathrm{C}} = 1+5\mathrm{i}$.
  Alors,

$$\mathrm{AB}^2 = |2-2\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})|^2 = |3-\mathrm{i}|^2 = 3^2+(-1)^2 = 10$$
$$\mathrm{AC}^2 = |1+5\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})|^2 = |2+6\mathrm{i}|^2 = 2^2+6^2 = 40$$
$$\mathrm{BC}^2 = |1+5\mathrm{i}-(2-2\mathrm{i})|^2 = |-1+7\mathrm{i}|^2 = (-1)^2+7^2 = 50$$

  donc $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ et ainsi, par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 2

Partie A. — Etude d'une fonction

1. Par théorème, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln x = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty}$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
2. La fonction f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1\times\ln x - x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

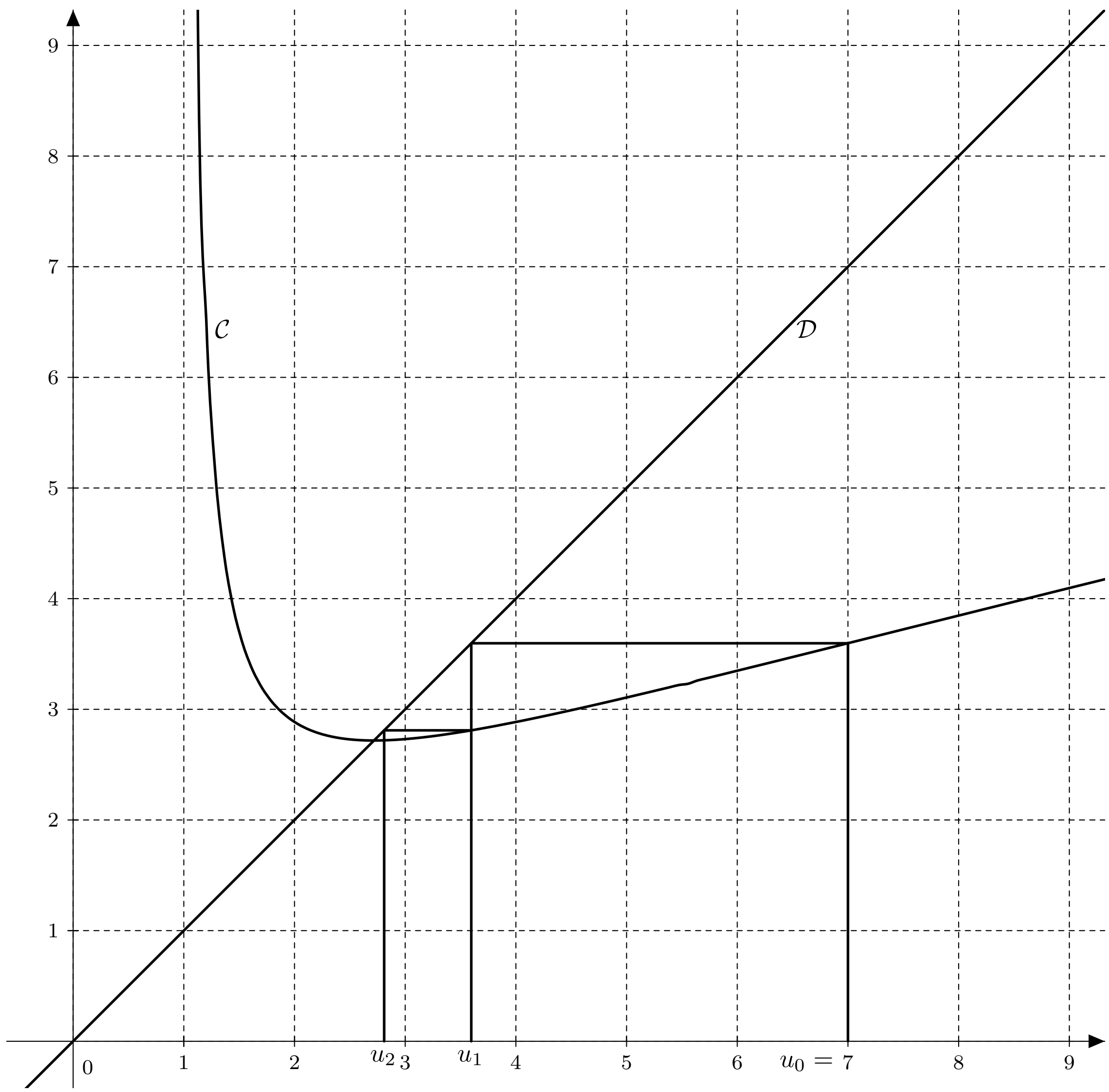
   Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln x - 1$. Or,

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$$

   donc $f'(x) \leq 0$ si $x \in]1\,;e]$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \in [e\,;+\infty[$.
   On conclut que $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]1\,;e] \text{ et croissante sur } [e\,;+\infty[}$.
3. Sur $[e\,;+\infty[$, f est croissante donc, pour tout réel $x \geq e$, $f(x) \geq f(e)$. Or, $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = \frac{e}{1} = e$ donc $\boxed{\text{pour tout réel } x \geq \mathrm{e},\ f(x) \geq \mathrm{e}}$.

Partie B. — Etude d'une suite récurrente

1.



On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ qui semble être égale à e.

2. **a.** Raisonnons par récurrence. Soit la proposition P_n : « $u_n \geq e$ ».
Etant donné que $u_0 = 7 \geq e$, la proposition P_0 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $u_k \geq e$ donc, d'après la question A.3, $f(u_k) \geq e$ i.e $u_{k+1} \geq e$ donc P_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq e}$.

b. *Méthode 1.* — Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n \geq e$ donc $\ln(u_n) \geq 1$. Dès lors, $\frac{1}{\ln u_n} \leq 1$ et, en multipliant par $u_n \geq 0$, on obtient $\frac{u_n}{\ln u_n} \leq u_n$ i.e. $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
Méthode 2. — On raisonne par récurrence. Soit la proposition Q_n : « $u_{n+1} \leq u_n$ ».
Etant donné que $u_1 = \frac{7}{\ln 7} \approx 3{,}6 \leq 7$, la proposition Q_0 est vraie.
Supposons que Q_k soit vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $e \leq u_{k+1} \leq u_k$ et, comme la fonction f est croissante sur $[e\,;+\infty[$, $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ i.e. $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc Q_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. Etant donné que (u_n) est décroissante et minorée par e, le théorème des suites monotones assure que (u_n) converge vers une limite $\ell \geq e$.

d. On a alors $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$. Or, f est dérivable donc continue sur $]1\,;+\infty[$ ce qui assure que $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell)$. Par unicité de la limite, on a donc $\ell = f(\ell)$. Or, comme $\ell \neq 0$,

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell}{\ln \ell} \Leftrightarrow \ln \ell = 1 \Leftrightarrow \ell = e.$$

Ainsi, $\boxed{\lim u_n = e}$.

3. **a.** Dans cet algorithme, la variable X prend successivement les différentes valeurs de la suite (u_n). Comme (u_n) converge vers $e \approx 2{,}7183$, il existe un rang N tel que $u_N \leq 2{,}719$ donc l'algorithme s'arrête.

b. La valeur affichée en sortie par l'algorithme est la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 2{,}719$. D'après le tableau, cette valeur est 4.

Exercice 3

1. **a.** Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AD] donc, par le théorème de la droite des milieux, (IJ) // (BD) et $\text{IJ} = \frac{1}{2}\text{BD}$. Par ailleurs, [BF] et [DH] sont parallèles et de même longueur donc BFHD est un parallélogramme et donc (BD) // (FH) et BD = FH.

On conclut donc que $\boxed{\text{(IJ) et (FH) sont parallèles et que IJ} = \frac{1}{2}\text{FH}}$.

b. Le résultat précédent implique que I, J, F et H sont coplanaires donc les droites (FI) et (HJ) sont soit sécantes soit parallèles. Si elles étaient parallèles alors les côtés opposés de IJFH seraient parallèles donc IJFH serait un parallélogramme et donc IJ = FH. Or, on a vu que $\text{IJ} = \frac{1}{2}\text{FH}$ donc (FI) et (HJ) ne sont pas parallèles. $\boxed{\text{Elles sont donc sécantes en un point K}}$.

c. Les plans (ABF) et (ADH) ont en commun le point A donc ils ne sont pas strictement parallèles. De plus, B est un point de (ABF) qui n'appartient pas à (ADH) donc ces deux plans ne sont pas confondus. Il s'ensuit qu'ils sont sécants selon une droite passant par A. Comme, de plus, (ABF) = (ABFE) et (ADH) = (ADHE), le point E est également un point commun aux deux plans. On conclut donc que $\boxed{\text{l'intersection des plans (ABF) et (ADH) est la droite (AE)}}$.

Comme la droite (FI) est incluse dans (ABF) et la droite (HJ) est incluse dans (ADH), le point d'intersection K de ces deux droites appartient aux deux plans (ABF) et (ADH) donc à l'intersection de ces deux plans. Ainsi, $\boxed{\text{K} \in \text{(AE)}}$.

2. **a.** Par théorème $\text{I}\left(\frac{0+1}{2}\,;\frac{0+0}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)$ i.e. $\boxed{\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)}$. De même, $\boxed{\text{J}\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)}$.

b. La droite (FI) passe par $\text{F}(1\,;0\,;1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{\text{FI}}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$ donc une représentation paramétrique de la droite (FI) est $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

De même, on montre qu'une représentation paramétrique de (HJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \frac{1}{2}s \\ z = 1 - s \end{cases}$ où $s \in \mathbb{R}$.

c. Pour déterminer les coordonnées de K, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t = 0 \\ 0 = 1 - \frac{1}{2}s \\ 1 - t = 1 - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ s = 2 \\ s = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ s = 2 \end{cases}.$$

On en déduit que K est le point de (FI) de paramètre $t = 2$ i.e. le point de coordonnées $\left(1 - \frac{1}{2} \times 2\,;0\,;1 - 2\right)$ soit $\boxed{\text{K}(0\,;0\,;-1)}$.

d. Les coordonnées du milieu de [EK] sont $\left(\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{1+(-1)}{2}\right)$ i.e $(0\,;0\,;0)$ qui sont bien les coordonnées de A donc $\boxed{\text{A est le milieu de [EK]}}$.

3. **a.** D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{\mathrm{LF}}+\overrightarrow{\mathrm{LH}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{LP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=2\overrightarrow{\mathrm{LP}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}$. Or, comme P est le milieu de [FH], $\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{0}$ donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{LF}}+\overrightarrow{\mathrm{LH}}=2\overrightarrow{\mathrm{LP}}}$.

b. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{LA}}+2\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{0}$ donc, toujours par la relation de Chasles, $\overrightarrow{\mathrm{LA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{LA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$ i.e. $3\overrightarrow{\mathrm{LA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{0}$. Il s'ensuit que $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}$.

c. Les coordonnées de P sont $\left(\frac{1+0}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\right)$ i.e. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;1\right)$. Comme A est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ sont celles de P et donc les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ sont $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$. Il s'ensuit que les coordonnées de L sont également $\boxed{\mathrm{L}\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)}$.

d. Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore.

$$\mathrm{AL}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{LC}^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$$

$$\mathrm{AC}^2=(1-0)^2+(1-0)^2+(0-0)^2=2$$

Ainsi, $\mathrm{AL}^2+\mathrm{LC}^2=2=\mathrm{AC}^2$ donc $\boxed{\text{ALC est rectangle en L}}$.

4. **a.** Les coordonnées des trois vecteurs sont $\overrightarrow{\mathrm{KC}}\,(1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{\mathrm{KG}}\,(1\,;1\,;2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\,\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KG}}$ ne sont pas colinéaires car $y_{\overrightarrow{\mathrm{KC}}}\times z_{\overrightarrow{\mathrm{KG}}}=2\neq 1=y_{\overrightarrow{\mathrm{KG}}}\times z_{\overrightarrow{\mathrm{KC}}}$. Montrons alors qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{KL}}=a\overrightarrow{\mathrm{KC}}+b\overrightarrow{\mathrm{KG}}$. En coordonnées, cette égalité se traduit par

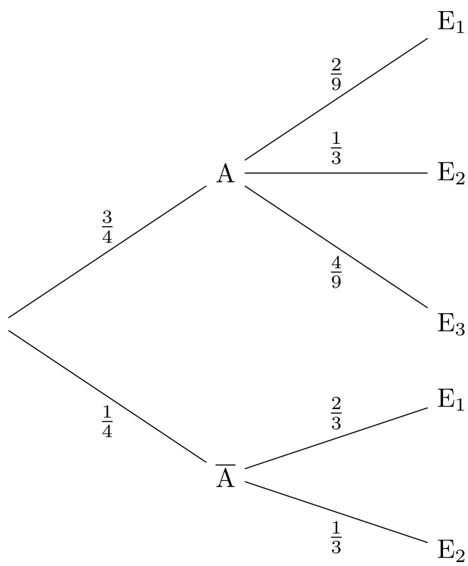
$$\begin{cases}\frac{1}{3}=a+b\\ \frac{1}{3}=a+b\\ \frac{5}{3}=a+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}-b\\ \frac{5}{3}=\frac{1}{3}-b+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{KL}}=-\overrightarrow{\mathrm{KC}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{KG}}$ donc $\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{KL}},\ \overrightarrow{\mathrm{KC}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{KG}} \text{ sont coplanaires}}$.

b. On en déduit que $\boxed{\text{les points C, G, K et L sont coplanaires}}$.

Exercice 4 (Obligatoire)

1.



2. **a.** D'après l'arbre, la probabilité que la personne aille au $2^{\text{ième}}$ étage par l'ascenseur est $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}_2) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$ soit $\boxed{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}_2) = \frac{1}{4}}$.

b. D'après l'arbre, la probabilité que la personne aille au $2^{\text{ième}}$ étage est $p(\mathrm{E}_2) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ i.e. $\boxed{p(\mathrm{E}_2) = \dfrac{1}{3}}$.

c. On sait déjà que $p(\mathrm{E}_2) = \frac{1}{3}$. De plus, d'après l'arbre, $p(\mathrm{E}_3) = \frac{3}{4}\times\frac{4}{9}$ donc $p(\mathrm{E}_3) = \frac{1}{3}$. Il s'ensuit que $p(\mathrm{E}_1) = 1-2\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. On conclut que $\boxed{\text{les trois événements } \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \text{ et } \mathrm{E}_3 \text{ sont équiprobables}}$.

d. On cherche $p_{\mathrm{E}_2}(\mathrm{A})$. Or, grâce aux questions 2.a et 2.c,

$$p_{\mathrm{E}_2}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{E}_2\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{E}_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, la probabilité que la personne emprunte l'ascenseur sachant qu'elle va au 2^{e} étage est $\frac{3}{4}$.

3. **a.** Interroger une personne au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$ en prenant comme succès « la personne va au $2^{\text{ième}}$ étage ». Interroger 20 personnes de façon indépendante revient à répéter 20 fois cette épreuve de façon identique : cela constitue donc un schéma de Bernoulli. Dès lors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit <u>une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{3}$</u>.

b. A l'aide de la calculatrice, $P(X=5)\approx 0{,}1457$ arrondi à 10^{-4} près.

c. L'espérance de X est $E(X) = np = \frac{20}{3}$ donc en moyenne, sur les 20 personnes, $\frac{20}{3}$ vont au $2^{\text{ième}}$ étage.

4. L'événement contraire de B_n est $\overline{\mathrm{B}_n}$: « aucune des n personnes ne va au $2^{\text{ième}}$ étage ». Comme les réponses sont indépendantes, la probabilité de $\overline{\mathrm{B}_n}$ est $p(\overline{\mathrm{B}_n}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et donc la probabilité de B_n est $p(\mathrm{B}_n) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Dès lors,

$$p(\mathrm{B}_n)\geq 0{,}999999 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}999999 \Leftrightarrow 10^{-6}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \ln(10^{-6})\geq n\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Etant donné que $\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$, il s'ensuit que

$$p(\mathrm{B}_n)\geq 0{,}999999 \Leftrightarrow \frac{\ln(10^{-6})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\leq n.$$

Sachant que $\frac{\ln(10^{-6})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\approx 34{,}07$, on conclut que le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de B_n soit supérieure ou égale à 0,999999 est $\boxed{n = 35}$.

Exercice 4 (spécialité)

1. $a_1 = 0{,}7a_0 + 0{,}2b_0 + 60$ donc $\boxed{a_1 = 330}$ et $b_1 = 0{,}1a_0 + 0{,}6b_0 + 70$ donc $\boxed{b_1 = 280}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7a_n + 0{,}2b_n \\ 0{,}1a_n + 0{,}6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{U_{n+1} = M \times U_n + P}$.

3. **a.** $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I}$.

b. Il s'ensuit que $I - M$ est inversible et que son inverse est $\boxed{(I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$.

c. $U = M \times U + P$ équivaut à $U - MU = P$ i.e. $(I - M)U = P$. Comme $I - M$ est inversible, cette équation matricielle a pour unique solution $U = (I - M)^{-1}P$ i.e. $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ soit finalement $\boxed{U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}}$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. ALors, $U_{n+1} = MU_n + P$ et $U = MU + P$ donc, en retranchant membre à membre, on obtient $U_{n+1} - U = MU_n - MU = M(U_n - U)$ soit $\boxed{V_{n+1} = M \times V_n}$.

b. La question précédente montre que la suite (V_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison M donc, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ V_n = M^n \times V_0}$.

5. **a.** Pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - U$ donc $U_n = V_n + U$ i.e.

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380 \\ -\dfrac{50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270 \end{pmatrix}}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n = -\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = -\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270}.$$

b. Etant donné que $-1 < 0{,}5 < 1$ et $-1 < 0{,}8 < 1$, $\lim 0{,}5^n = \lim 0{,}8^n = 0$ donc $\lim a_n = 380$ et $\lim b_n = 270$. Ainsi, à long terme, l'hypermarché A aura environ 380 000 clients et l'hypermarché B environ 270 000 clients.

c. Le nombre total, en milliers, de clients à l'année 2010+n est $c_n = a_n + b_n$ i.e.

$$c_n = \left(-\frac{100}{3} \times 0{,}8^n - \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 380\right) + \left(-\frac{50}{3} \times 0{,}8^n + \frac{140}{3} \times 0{,}5^n + 270\right) = 650 - 50 \times 0{,}8^n.$$

Dès lors,

$$c_n \geq 649 \Leftrightarrow 650 - 50 \times 0{,}8^n \geq 649 \Leftrightarrow 1 \geq 50 \times 0{,}8^n \Leftrightarrow \frac{1}{50} \geq 0{,}8^n \Leftrightarrow -\ln(50) \geq n \ln(0{,}8)$$

et étant donné que $\ln(0{,}8) < 0$, on obtient

$$c_n \geq 649 \Leftrightarrow \frac{-\ln(50)}{\ln(0{,}8)} \leq n.$$

Comme $\frac{-\ln(50)}{\ln(0{,}8)} \approx 17{,}5$, on en déduit que $c_n \geq 649$ si et seulement si $n \geq 18$. Comme $n = 18$ correspond à l'année $2013 + 18 = 2031$, on conclut que le nombre total de clients de deux hypermarchés dépassera 649 000 en 2031.