Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On désigne par A le point d'affixe i.
A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z^2}{\mathrm{i} - z}$.

1. Déterminer l'affixe z' de M' dans le cas où M est le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{i}$.

2. Déterminer les affixes z des points M tels que $z' = z$.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

   a. Démontrer que la partie réelle de z' est $\dfrac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$.

   b. En déduire l'ensemble (E) des points M tels que le point M' est situé sur l'axe des imaginaires purs.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. La justification consistera à démontrer l'affirmation si celle-ci est vraie et à donner un contre-exemple si celle-ci est fausse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

Affirmation 1. Si (u_n) est une suite réelle monotone et bornée alors (u_n) est convergente.

Affirmation 2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Affirmation 3. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à valeurs strictement positives telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

Affirmation 4. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est bornée.

On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = \dfrac{5}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{1}{3}t_n^2 + \dfrac{2}{3}$. On admet que $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Affirmation 5. La suite (t_n) est décroissante.

Exercice 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse à un site internet qui propose différents jeux en ligne.

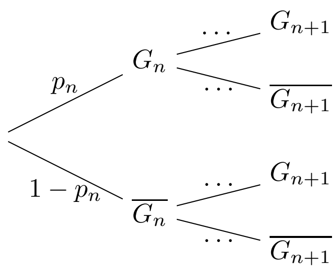
Partie A. — Pour un premier jeu, on sait que

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la $n-$ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B. — Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes et que la probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30€ pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8€.

a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Calculer la probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€. On arrondira le résultat à 10^{-5} près.

Exercice 4 (7 points)

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire h

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x.
2. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
6. Déterminer le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Partie B. – Etude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?
3. Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 1.
   Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?

Dans la suite, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Partie C. – Etude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Pour tout réel $x \neq 1$, on pose $d(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $d(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-1}$.
2. Etudier le signe de $d(x)$ en fonction de x et en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   On montrera en particulier que les deux courbes se coupent en un unique point A dont on donnera les coordonnées.
3. Dans cette question, on cherche à minimiser l'écart $d(x)$ lorsque $x \in]-\infty\,;1[$.
   - **a.** Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-1)^2}$ où h est la fonction définie en partie A.
   - **b.** En déduire que, sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, l'écart $d(x)$ est minimal pour $x = \alpha$.
   - **c.** On note T_f et T_g les tangentes respectives à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse α.
     Les droites T_f et T_g sont-elles parallèles ?