Corrigé du devoir surveillé du 20 mai 2017

Exercice 1 (5 points)

1. On a $\mathrm{BC}^2 = (0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2 = 5$, $\mathrm{BD}^2 = (6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2 = 75$ et $\mathrm{CD}^2 = (6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2 = 70$ donc $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2$. On déduit de la réciproque du théorème de Pythagore que $\boxed{\text{le triangle BCD est rectangle en C}}$.

   Par suite, son aire est $\mathcal{B} = \dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{CD}}{2} = \dfrac{\sqrt{70}\times\sqrt{5}}{2}$ soit $\boxed{\mathcal{B} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}}$.

2. **a.** Comme $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,(1\,;0\,;2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(6\,;5\,;-3)$, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -2+0+2 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -12+15-3 = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BCD) donc $\boxed{\overrightarrow{n}\text{ est un vecteur normal au plan (BCD)}}$.

   b. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y\,;z)\in(\mathrm{BCD}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}M} = 0\\ &\Leftrightarrow -2(x+1)+3(y-1)+1(z-0)=0\\ &\Leftrightarrow -2x+3y+z-5=0 \end{aligned}$$

   donc $\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (BCD) est } -2x+3y+z-5=0}$.

3. La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (BCD) donc elle est dirigée par $\overrightarrow{n}$. Par suite, une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{\begin{cases} x = 5-2t\\ y = -5+3t\ ,\ \ t\in\mathbb{R}\\ z = 2+t \end{cases}}.$$

4. Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = 5-2t\\ y = -5+3t\\ z = 2+t\\ -2x+3y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2t\\ y = -5+3t\\ z = 2+t\\ -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t)-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2t\\ y = -5+3t\\ z = 2+t\\ -28+14t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\\ y = 1\\ z = 4\\ t = 2 \end{cases}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de H sont } (1\,;1\,;4)}$.

5. Comme $\mathcal{D}$ est orthogonal au plan (BCD), la hauteur du tétraèdre ABCD issue de A est H. Ainsi, le volume du tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}\times\mathrm{AH}$. Or,

$$\mathrm{AH} = \sqrt{(1-5)^2+(1+5)^2+(4-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

   donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{14}}{2}\times2\sqrt{14}$ soit $\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{70}{3}}$.

6. Comme $\overrightarrow{AB}\,(-6\,;6\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-5\,;6\,;0)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 30+36+0 = 66$. Or, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$ donc $\cos(\widehat{\text{BAC}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\text{AB}\times\text{AC}} = \dfrac{66}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}} = \dfrac{33}{\sqrt{1159}}$. À l'aide de la calculatrice, on en déduit que $\boxed{\widehat{\text{BAC}}\approx 14{,}2°}$.

Exercice 2 (7 points)

Partie A

1. Puisque

$$f(x_{\text{B}}) = f(2e) = 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e\ln(e) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 = y_{\text{B}}$$

et

$$f(x_{\text{I}}) = f(2) = 2\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 2e\ln(1) = 0 = y_{\text{I}},$$

$\boxed{\text{les points B et I appartiennent à la courbe } \mathcal{C}_f}$.

2. La fonction f est dérivable sur $[2\,;2e]$ par produit, composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x\in[2\,;2e]$,

$$f'(x) = 1\times\ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Or, pour tout $x\in[2\,;2e]$, $\dfrac{x}{2}\geqslant 1$ donc, par propriété de la fonction ln, $f'(x)\geqslant 0$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$. Ainsi, par théorème, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [2\,;2e]}$. Ainsi, pour tout $x\in[2\,;2e]$, $f(x)\leqslant f(2e)$ et $f(2e) = 2$ d'après la question précédente donc, $\boxed{\text{pour tout } x\in[2\,;2e],\ f(x)\leqslant 2}$.

3. a. Une équation de la droite $\mathcal{T}$ est $y = f'(2e)(x-2e) + f(2e)$. Or, $f'(2e) = \ln(e) = 1$ et $f(2e) = 2$ donc $\boxed{\text{une équation de } \mathcal{T} \text{ est } y = x - 2e + 2}$.
Le point D est le point de $\mathcal{T}$ d'ordonnée nulle. Son abscisse est donc solution de $x - 2e + 2 = 0$ et donc $x_{\text{D}} = 2e - 2$. Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de D sont } (2e-2\,;0)}$.

b. Le triangle ABI est rectangle en A donc son aire est $\dfrac{\text{AI}\times\text{AB}}{2} = \dfrac{2(2e-2)}{2} = 2e-2$ et le trapèze AIDB est également rectangle en A et en I donc son aire est $\dfrac{(\text{ID}+\text{AB})\times\text{AI}}{2} = \dfrac{(2e-2-2+2e-2)\times 2}{2} = 4e-6$. Ainsi, $2(e-1)\leqslant S\leqslant 2(2e-3)$ donc le volume $V = 5S$ est de la cuve vérifie $\boxed{10(e-1)\leqslant V\leqslant 10(2e-3)}$.

4. a. La fonction G est dérivable sur $[2\,;2e]$ par somme, produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x\in[2\,;2e]$,

$$G'(x) = x\times\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$$

donc $\boxed{G \text{ est une primitive de la fonction } g \text{ sur } [2\,;2e]}$.

b. Pour tout $x\in[2\,;2e]$, $f(x) = g(x) - x + 2$ donc une primitive la fonction f sur $[2\,;2e]$ est la fonction $F : x\mapsto G(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ c'est-à-dire $\boxed{F : x\mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x}$.

c. Pour tout $x \in [2\,;2e]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$ donc S est égale du rectangle AIJB moins l'aire sous la courbe de f où J est le point de coordonnées $(2e\,;0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= 2(2e-2) - \int_2^{2e} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 4e - 4 - (F(2e) - F(2)) = 4e - 4 - \left(2e^2 - 3e^2 + 4e - (-3+4)\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{S = e^2 - 3}$.

On en déduit que $\boxed{V = 5S \approx 22 \text{ m}^3}$.

Partie B

1. a. La fonction v est dérivable sur $[2\,;2e]$ comme produit, composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [2\,;2e]$,

$$\begin{aligned} v'(x) &= 5\left[x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 2\right] \\ &= 5\left[(x-2)\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{2} + 2\right] \end{aligned}$$

donc $\boxed{v'(x) = 5(x-2)\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$.

b. Pour tout $x \in [2\,;2e]$, $x - 2 \geqslant 0$ et $\dfrac{x}{2} \geqslant 1$ donc $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 0$. De plus, ces deux nombres s'annulent si et seulement si $x = 2$ donc $v'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [2\,;2e]$ et v' ne s'annule que pour $x = 2$. Il s'ensuit que v est strictement croissante sur $[2\,;2e]$. De plus, v est dérivable donc continue sur $[2\,;2e]$.

Par ailleurs, $v(2) = 0 < 1$ et $v(2e) = 5(e^2 - 3) > 1$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [2\,;2e]$ tel que $v(\alpha) = 1$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $v(3{,}12) \approx 0{,}98 < 1$ et $v(3{,}13) \approx 1{,}005 > 1$ donc $\boxed{3{,}12 < \alpha < 3{,}13}$.

2. L'algorithme proposé est un algorithme de dichotomie qui permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 3 (5 points)

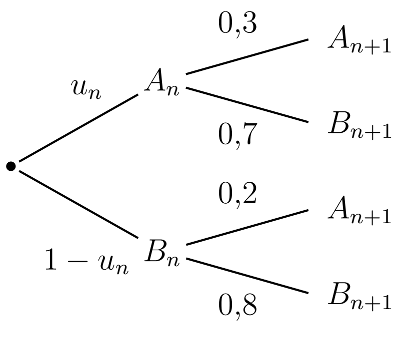
1. a. D'après l'énoncé, $p(A_1) = p(B_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p_{A_1}(A_2) = 0{,}3$. De plus, $p_{B_1}(B_2) = 0{,}8$ donc $p_{B_1}(A_2) = 1 - p_{B_1}(B_2) = 0{,}2$.

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(A_2) = p(A_1)\,p_{A_1}(A_2) + p(B_1)\,p_{B_1}(A_2) = \frac{1}{2} \times 0{,}3 + \frac{1}{2} \times 0{,}2 = \frac{1}{2} \times 0{,}5$$

donc $\boxed{p(A_2) = \dfrac{1}{4}}$.

c.



d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après l'arbre,

$$u_{n+1} = p(A_{n+1}) = u_n \times 0{,}3 + (1 - u_n)0{,}2 = 0{,}3u_n + 0{,}2 - 0{,}2u_n$$

donc $\boxed{u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2}$.

e. En tabulant les valeurs de (u_n) à l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) converge vers 0,2222... soit une valeur proche de $\dfrac{2}{9}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right)$$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{1}{10}}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9}$ soit $\boxed{v_1 = \dfrac{5}{18}}$.

b. Il s'ensuit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{5}{18} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{5}{18} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{9}}$.

c. Étant donné que $-1 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{9}}$.
Ce résultat permet donc de valider la conjecture émise en **1.e.**.

Exercice 3 (5 points)

1. a. Étant donné que $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$, $\boxed{\text{le couple } (3\,;4) \text{ est solution de (E)}}$.

b. Soit $(x\,;y)$ un couple d'entier. Alors, $(x\,;y)$ est solution de (E) si seulement si $7x-5y = 1$. Or,

$$7x-5y = 1 \Leftrightarrow 7x-5y = 7\times3-5\times4 \Leftrightarrow 7x-7\times3 = -5\times4+5y \Leftrightarrow 7(x-3) = 5(y-4).$$

Ainsi, $\boxed{\text{un couple d'entiers } (x\,;y) \text{ est solution de (E) si et seulement si } 7(x-3) = 5(y-4)}$.

c. Supposons qu'un couple d'entiers $(x\,;y)$ est solution de (E). Alors, $7(x-3) = 5(y-4)$ donc 5 divise $7(x-3)$. Or, $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$ donc, par le théorème de Bézout, 7 et 5 sont premiers entre eux donc, on déduit du théorème de Gauss que 5 divise $x - 3$. Il existe donc un entier k tel que $x - 3 = 5k$ i.e. $x = 5k + 3$. De plus, $7 \times 5k = 5(y - 4)$ donc $7k = y - 4$ i.e. $y = 7k + 4$. Ainsi, si $(x\,;y)$ est solution de (E) alors il existe un entier k tel que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$. Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$. Alors,

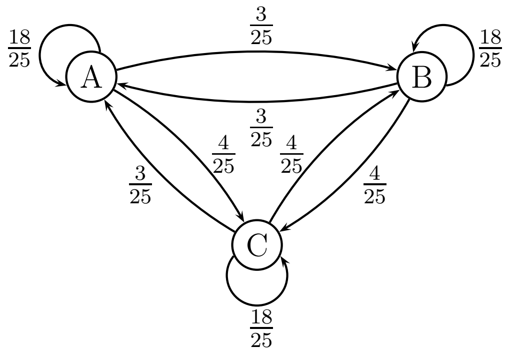
$$7x - 5y = 7(5k + 3) - 5(7k + 4) = 35k + 21 - 35 - 20 = 1$$

donc $(x\,;y)$ est solution de (E).
Finalement on conclut que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que $\boxed{\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{Z}}$.

2. Par définition x et y sont des entiers naturels tels que $7x - 5y = 1$, $1 \leqslant x \leqslant 23$ et $1 \leqslant y \leqslant 23$. Il existe donc un entier k tel que $x = 5k+3$ et $y = 7k+4$ avec $1 \leqslant 5k+3 \leqslant 23$ et $1 \leqslant 7k+4 \leqslant 23$. Il s'ensuit que $0 \leqslant k \leqslant 4$ et $0 \leqslant y \leqslant 2$ donc $k \in \{0, 1, 2\}$. Les valeurs possibles pour $(x\,;y)$ sont donc $(3\,;4)$, $(8\,;11)$ et $(13\,;18)$. De plus, $x + y \leqslant 24$ donc le dernier couple est impossible. On conclut que la boîte contient soit 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs soit 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.

3. Au départ, le pion est sur A donc $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On peut représenter la marche aléatoire par le graphe probabiliste suivant.



La matrice de transition associée à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{18}{25} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix} = T$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 T^n$.

4. a. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : $T^n = PD^nP^{-1}$. Comme $T^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, H_0 est vraie.

Supposons que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $T^{k+1} = T^kT = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kI_3DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$ donc H_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = PD^nP^{-1}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56^n \end{pmatrix}$.

5. a. Comme $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, X_0T^n est la première ligne de T^n donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$.

On en déduit que $c_n = 1 - \alpha - \beta_n$ soit $\boxed{c_n = \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times 0{,}56^n}$.

b. Comme $-1 < 0{,}6 < 1$ et $-1 < 0{,}56 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}56^n = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{10},\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{37}{110} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{4}{11}}$.

c. Étant donné que $\frac{3}{10} < \frac{37}{110} < \frac{4}{11}$, le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire est le sommet C.

Exercice 4 (3 points)

Commençons par déterminer les abscisses de A et B. Pour cela, on résout l'équation $f(x) = g(x)$. Or, pour tout $x\,]0\,;16[$,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2\pi, 4\pi\}.$$

Ainsi, l'abscisse de A est 2π et celle de B est 4π.

Remarquons ensuite que, pour tout $x \in [0\,;16]$, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $1 - \cos(x) \geqslant 0$ et ainsi $g(x) \geqslant f(x)$.

Comme les fonctions f et g sont continues sur $[0\,;16]$ par composée et somme de fonctions continues, on en déduit que

- l'aire de $\mathcal{A}_1$ est

$$\int_0^{2\pi} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1 - \cos(x)\,\mathrm{d}x = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = 2\pi - \sin(2\pi) - 0 = 2\pi$$

- l'aire de $\mathcal{A}_2$ est

$$\int_{2\pi}^{4\pi} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{4\pi} 1 - \cos(x)\,\mathrm{d}x = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = 4\pi - \sin(4\pi) - [2\pi - \sin(2\pi)] = 2\pi$$

On conclut donc que $\boxed{\text{les aires des surfaces } \mathcal{A}_1 \text{ et } \mathcal{A}_2 \text{ sont égales}}$.