Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement spécifique

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (5 points). — Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$\mathrm{A}\,(5\,;-5\,;2)\,,\ \mathrm{B}\,(-1\,;1\,;0)\,,\ \mathrm{C}\,(0\,;1\,;2)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}\,(6\,;6\,;-1)\,.$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

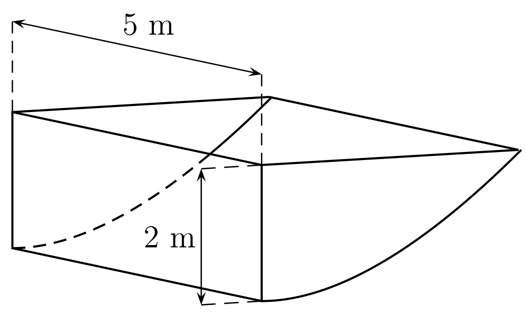
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.

6. On admet que $\mathrm{AB} = \sqrt{76}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{61}$.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

Exercice 2 (7 points). — Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.

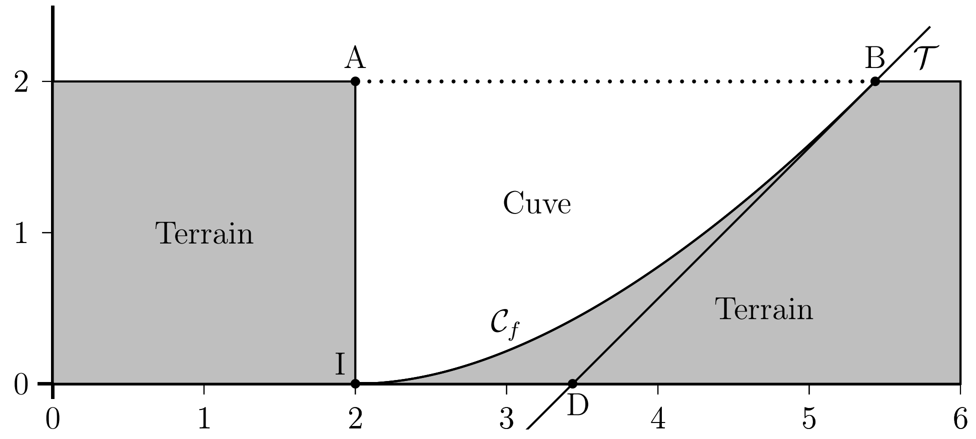


La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A$(2\,;2)$, I$(2\,;0)$ et B$(2e\,;2)$.



Partie A. — L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Démontrer que f est strictement croissante sur $[2\,;2e]$ et en déduire que, pour tout $x \in [2\,;2e]$, $f(x) \leqslant 2$.

3. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$. Cette aire S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

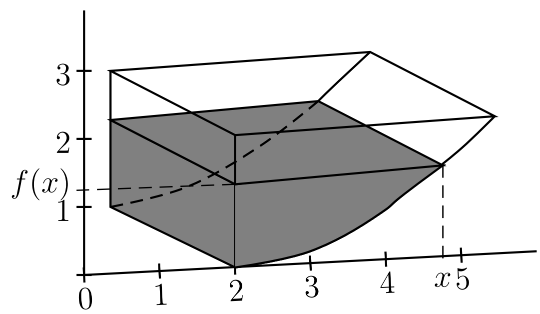
b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$.

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B. — Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x \in [2\,;2e]$,
$$v'(x) = 5(x-2)\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$
   b. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in [2\,;2e]$ tel que $v(\alpha) = 1$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2. On considère l'algorithme ci-contre. Que permet d'obtenir cet algorithme concernant le nombre α ?

```
Variables  :     a est un réel
                 b est un réel
Traitement :     a prend la valeur 2
                 b prend la valeur 2e
                 Tant que b − a > 10^−3 faire :
                   | c prend la valeur (a + b)/2
                   | Si v(c) < 1, alors :
                   |    | a prend la valeur c
                   | Sinon
                   |    | b prend la valeur c
                   | Fin Si
                 Fin Tant que
Sortie :         Afficher a et b
```

Exercice 3 (5 points). — Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les évènements :

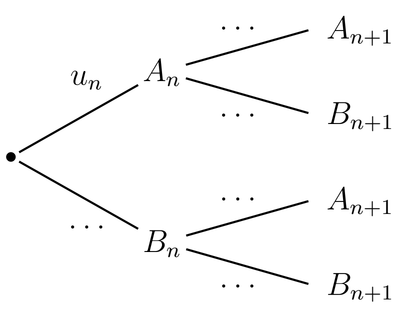
- A_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- B_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = p\,(A_n)$$
où $p\,(A_n)$ est la probabilité de l'évènement A_n.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p\,(A_1)$ et $p\,(B_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{A_1}(A_2)$ et $p_{B_1}(A_2)$.

   b. Montrer que $p\,(A_2) = \dfrac{1}{4}$.

   c. Soit un entier $n \geqslant 1$. Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

   e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n en fonction de n. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de n.

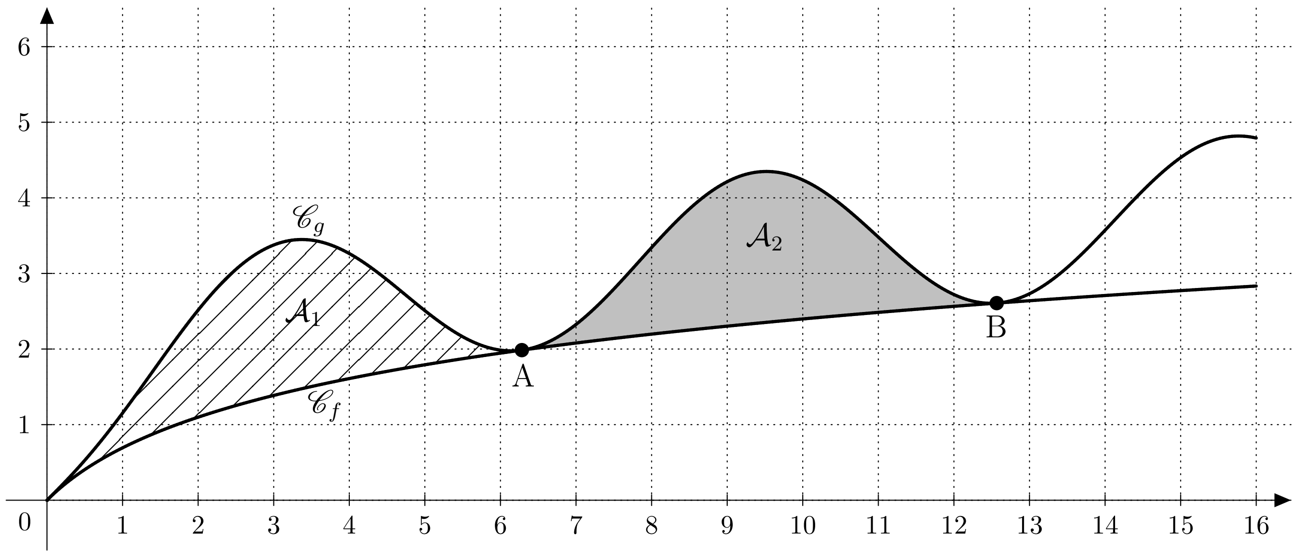
c. Calculer la limite de la suite (u_n).
Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1.e.** ?

Exercice 4 (3 points). — On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Sur la figure ci-dessous, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de f et de g. Les points A et B sont les deux points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;16[$.

On note $\mathcal{A}_1$ la surface hachurée et $\mathcal{A}_2$ la surface grisée.



Comparer les aires des surfaces $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.