Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (5 points). — Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$\mathrm{A}\,(5\,;-5\,;2)\,,\ \mathrm{B}\,(-1\,;1\,;0)\,,\ \mathrm{C}\,(0\,;1\,;2) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}\,(6\,;6\,;-1)\,.$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante.*

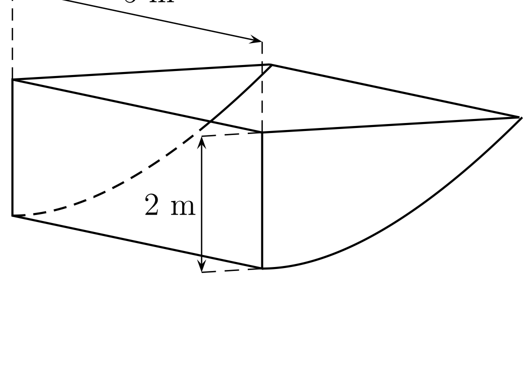
6. On admet que $\mathrm{AB} = \sqrt{76}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

Exercice 2 (7 points). — Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.

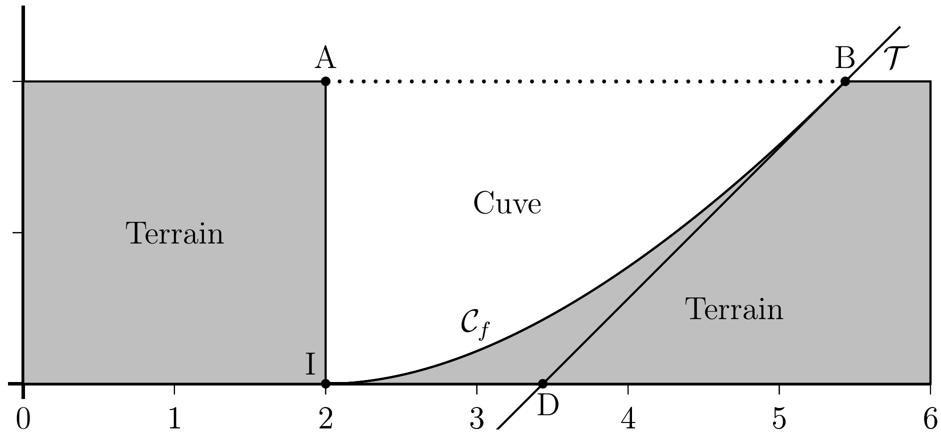


La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A$(2\,;2)$, I$(2\,;0)$ et B$(2e\,;2)$.



Partie A. — L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Démontrer que f est strictement croissante sur $[2\,;2e]$ et en déduire que, pour tout $x \in [2\,;2e]$, $f(x) \leqslant 2$.

3. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$. Cette aire S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

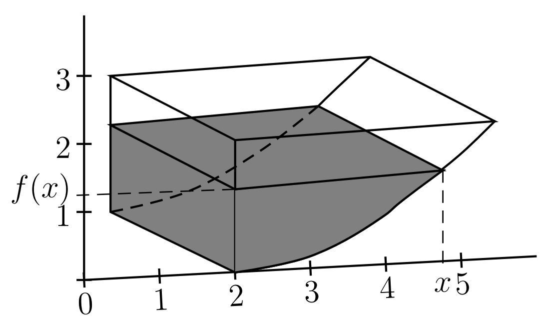
b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$.

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B. — Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x \in [2\,;2e]$,

$$v'(x) = 5(x-2)\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

b. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in [2\,;2e]$ tel que $v(\alpha) = 1$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2. On considère l'algorithme ci-contre. Que permet d'obtenir cet algorithme concernant le nombre α ?

```
Variables :      a est un réel
                 b est un réel
Traitement :     a prend la valeur 2
                 b prend la valeur 2e
                 Tant que b − a > 10^−3 faire :
                  | c prend la valeur (a + b)/2
                  | Si v(c) < 1, alors :
                  |    | a prend la valeur c
                  | Sinon
                  |    | b prend la valeur c
                  | Fin Si
                 Fin Tant que
Sortie :         Afficher a et b
```

Exercice 3 (5 points)

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1.$$

a. Vérifier que le couple $(3\,;4)$ est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si

$$7(x-3) = 5(y-4).$$

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que $\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Parmi les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

• Lorsqu'on est en A, si le jeton tiré est rouge, le pion va en B, si le jeton tiré est vert, le pion va en C et si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

• Lorsqu'on est en B, si le jeton tiré est rouge, le pion va en A, si le jeton tiré est vert, le pion va en C et si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

• Lorsqu'on est en C, si le jeton tiré est rouge, le pion va en A, si le jeton tiré est vert, le pion va en B et si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}$.

- **a.** À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.
- **b.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = PD^nP^{-1}$.
- **c.** Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n, β_n et γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n. Ainsi,

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0{,}6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0T^n$.

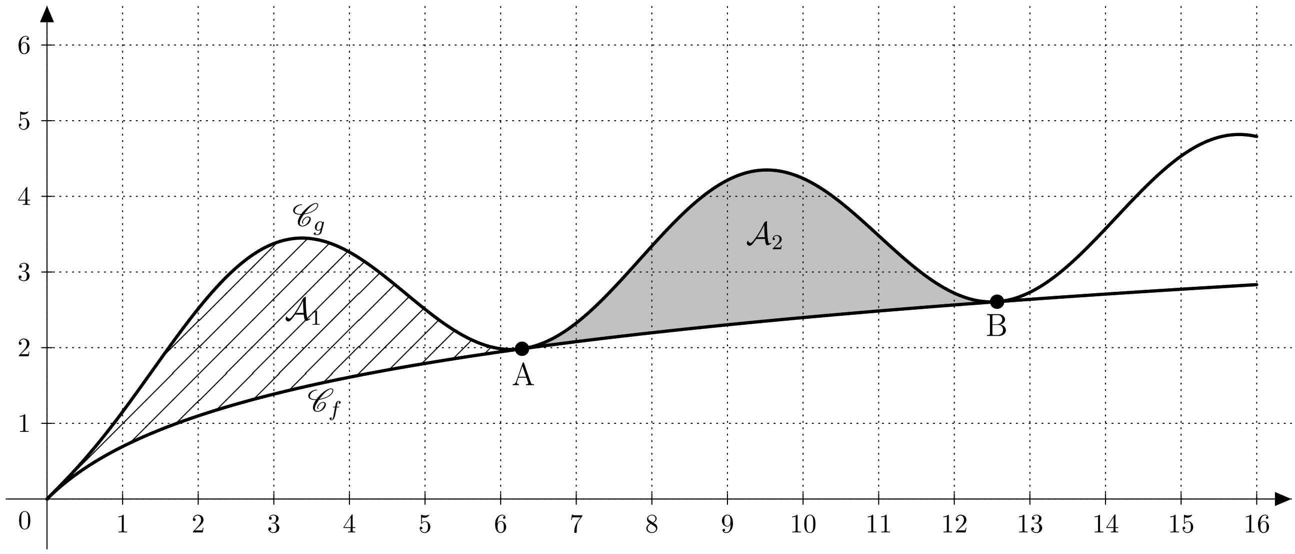
- **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les nombres a_n et b_n à l'aide des coefficients α_n et β_n.
  En déduire c_n.
- **b.** Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
- **c.** Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

Exercice 4 (3 points). — On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Sur la figure ci-dessous, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de f et de g. Les points A et B sont les deux points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;16[$.

On note $\mathcal{A}_1$ la surface hachurée et $\mathcal{A}_2$ la surface grisée.



Comparer les aires des surfaces $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.