Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (5 points). — Les deux parties de cet exercice sont totalement indépendantes.

Partie A

1. **Question de cours**. — Soit A et B deux évènements liés à une même expérience aléatoire. On suppose que A et B sont indépendants. Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Pour les fêtes de Noël, un grand magasin organise un jeu. Lorsqu'un client passe en caisse, on lui donne un ticket à gratter. S'il découvre une somme d'argent en grattant ce ticket, il empoche cette somme. Ensuite, il inscrit son nom sur ce ticket et le dépose dans une urne en vue d'un tirage au sort qui permet également de gagner une somme d'argent. On sait que la probabilité de gagner au grattage est 0,05 et que la probabilité de gagner au tirage au sort est 0,001. On suppose, de plus, que le grattage et le tirage sont indépendants.
   Un client passe en caisse et on lui donne un ticket au hasard. Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent à ce jeu ?

Partie B. — Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant en détails sa réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $z\overline{z} = 4$.
   Affirmation 1 : $\mathscr{C}$ est un cercle.
2. On considère, pour tout nombre complexe $z \neq 0$, l'équation (E) : $z + \dfrac{1}{z} = 1$.
   Affirmation 2 : l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées dont la partie réelle est $\frac{1}{2}$.
3. Une urne contient 50 boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement et avec remise 10 boules dans l'urne et on note, à chaque tirage, le nombre obtenu. On considère l'évènement E : « obtenir au moins 5 nombres supérieurs ou égaux à 35 au cours des 10 tirages » et on note $P(E)$ la probabilité de cet évènement.
   Affirmation 3 : une valeur approchée de $P(E)$ à 10^{-3} près est 0,047.
4. On lance 5 fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'évènement F : « obtenir au moins une fois le nombre 6 lors des 5 lancers » et on note $P(F)$ la probabilité de cet évènement.
   Affirmation 4 : la valeur exacte de $P(F)$ est $\frac{775}{1296}$.

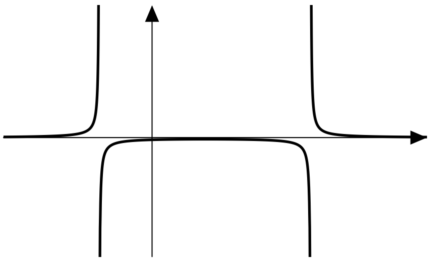
Exercice 2 (7 points). — Dans cet exercice, les parties B et C sont indépendantes.

Partie A. — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 12$.

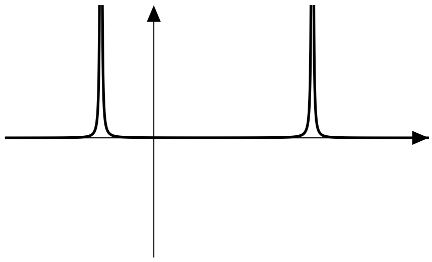
1. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ en fonction de x et présenter les résultats sous forme d'un tableau.
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B. — On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

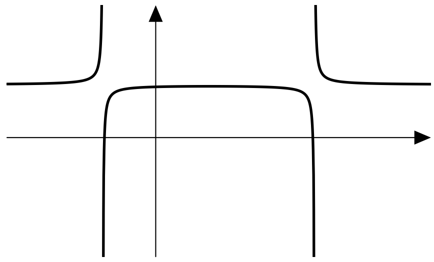
1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. Déterminer les limites de h (éventuellement à droite et à gauche) aux bornes de cet ensemble de définition puis donner une interprétation graphique de ces limites.
3. On a représenté ci-dessous l'allure de trois courbes. L'une d'entre elles peut-elle correspondre à la courbe de h ? On justifiera sa réponse en utilisant uniquement les résultats de la question précédente.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

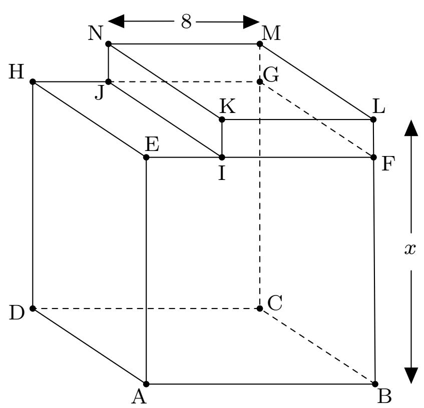
Partie C. — On considère la fonction f définie sur $D =]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 20}{x - 2}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D.
2. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ où g est définie dans la partie A.
3. En déduire, pour tout $x \in D$, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D.
5. Un jouet en bois est composé de deux pavés droits ABCDEFGH et IFGJKLMN collés l'un sur l'autre comme sur le schéma ci-dessous.

   Les contraintes de fabrication sont les suivantes :

   - la longueur BF mesure 2 cm de moins que la longueur BL ;
   - le quadrilatère ABFE est un carré ;
   - NM = 8 cm ;
   - l'aire du rectangle ABCD est égale à 20 cm^2 ;

   On note x la mesure en cm de la longueur BL.



   Comment choisir x afin que le volume du jouet soit le plus petit possible ?
   Quel est alors ce volume en cm^3 ?

Exercice 3 (5 points)

Un employé se rend au travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de la ville qui lui coûte 1,5€. On a pu constater que :

- si l'employé est à l'heure un jour donné alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{4}$;
- si l'employé est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{10}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par R_n l'évènement « l'employé est en retard le jour n » et on note p_n la probabilité de l'évènement R_n.

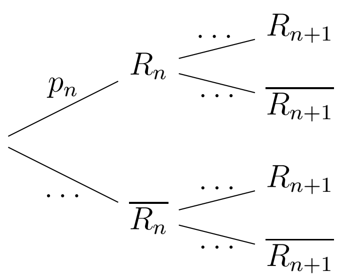
On suppose de plus que le jour 1, l'employé est à l'heure.

1. **a.** Quelle est la valeur de p_1 ?

b. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p_3 = \frac{17}{80}$.

c. Sachant que l'employé est en retard le jour 3, quelle est la probabilité qu'il ait été en retard le jour 2. On donnera la valeur exacte du résultat sous forme d'une fraction irréductible puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

2. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{20}p_n$.

c. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie la valeur de p_N pour une valeur de N donné en entrée.

Entrée :	Saisir la valeur de N
Initialisation :	P prend la valeur ______________
Traitement :	Pour K allant de ______________
	│ P prend la valeur ______________
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P

d. Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \frac{5}{23}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

e. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

f. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 4 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0 \end{cases}.$$

et la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Voici une copie d'écran d'un tableur à l'aide duquel on a calculé les premiers termes de ces deux suites. Les valeurs de (u_n) sont des valeurs exactes sous forme de fractions irréductibles alors que les valeurs de (S_n) sont des valeurs approchées à 10^{-9} près.

	A	B	C	D	E
1	n	u_n	S_n		
2	0	0	0		
3	1	1/2	0,5		
4	2	2/3	1,166666667		
5	3	3/4	1,916666667		
6	4	4/5	2,716666667		
7	5	5/6	3,55		
8	6	6/7	4,407142857		
9	7	7/8	5,282142857		
10	8	8/9	6,171031746		
11	9	9/10	7,071031746		
12	10	10/11	7,980122655		

1. Quelles formules, étirées ensuite vers le bas, ont été écrites dans les cellules B3 et C3 pour obtenir les termes successifs des suites (u_n) et (S_n) ?
2. **a.** À partir des valeurs du tableau, conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de u_n en fonction de n.

   b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. **(Bonus)** La suite (S_n) est-elle convergente ?