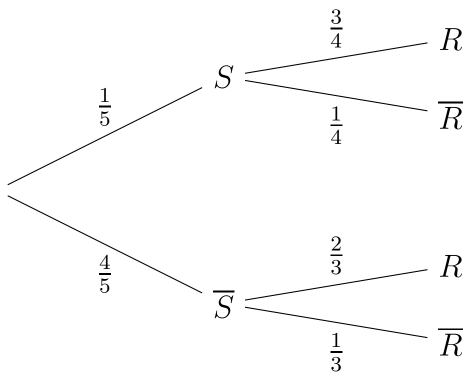
# Corrigé du devoir surveillé du 18/11/17

## Exercice 1

**1.** On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.




**2.** Si l'étudiant choisi a suivi le stage, la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens est $P_{\mathrm{R}}(\overline{\mathrm{S}}) = 1 - P_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = 1 - \frac{3}{4}$ i.e. $\boxed{P_{\mathrm{R}}(\overline{\mathrm{S}}) = \frac{1}{4}}$.

**3.** La probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens est $P(\mathrm{S} \cap \mathrm{R}) = P(\mathrm{S})P_{\mathrm{S}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ i.e. $\boxed{P(\mathrm{S} \cap \mathrm{R}) = \frac{3}{20}}$.

**4.** Les évènements S et $\overline{\mathrm{S}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(\mathrm{R}) = P(\mathrm{S})P_{\mathrm{S}}(\mathrm{R}) + P(\overline{\mathrm{S}})P_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

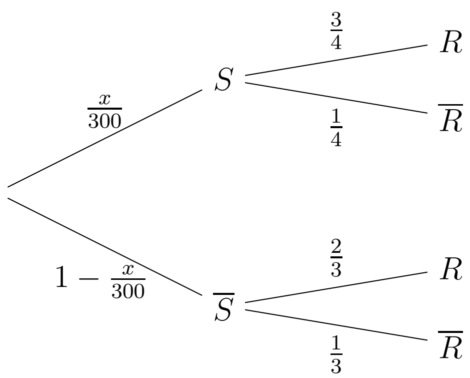
i.e. $\boxed{P(\mathrm{R} = \frac{41}{60}}$.

**5.** Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, la probabilité qu'il ait suivi le stage est

$$P_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \frac{P(\mathrm{S} \cap \mathrm{R})}{P(\mathrm{R})} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{41}{60}} = \frac{3}{20} \times \frac{60}{41}$$

i.e. $\boxed{P_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \frac{9}{41} \approx 0{,}22}$.

**6.** Notons $x$ le nombre de places au stage. Si toutes ces places sont occupées par des étudiants, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard suive le stage est $\frac{x}{300}$. On a donc l'arbre suivant :



En raisonnant comme dans la question 4, la probabilité qu'un étudiant pris au hasard réussisse l'examen est alors

$$P(\mathrm{R})=\frac{x}{300}\times\frac{3}{4}+\left(1-\frac{x}{300}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{x}{400}+\frac{2}{3}-\frac{2x}{900}=\frac{x}{3600}+\frac{2}{3}$$

On cherche $x$ tel que $P(\mathrm{R})\geqslant\frac{70}{100}$. Or,

$$P(\mathrm{R})\geqslant\frac{70}{100}\Leftrightarrow\frac{x}{3600}+\frac{2}{3}\geqslant\frac{70}{100}\Leftrightarrow\frac{x}{3600}\geqslant\frac{70}{100}-\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{3600}\geqslant\frac{1}{30}\Leftrightarrow x\geqslant\frac{3600}{30}\Leftrightarrow x\geqslant 120.$$

Ainsi, pour espérer atteindre au moins 70% de réussite, il faut que l'université prévoit au moins 120 places lors du stage.

## Exercice 2

**1.** FAUX. Par exemple, si $b=1$ alors $\frac{1}{3+\mathrm{i}}=\frac{3-\mathrm{i}}{3^2+1^2}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i}$ donc la partie réelle de $\frac{1}{3+\mathrm{i}}$ est $\frac{3}{10}\neq\frac{1}{3}$.

**2.** VRAI. Si on écrit $z$ sous forme algébrique $z=a+\mathrm{i}b$ alors $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)=2a\in\mathbb{R}$ et $z\overline{z}=a^2+b^2\in\mathbb{R}$ donc, par somme, le nombre $z+\overline{z}-z\overline{z}$ est réel.

**3.** FAUX. Pour tout complexe $z$, $z^2+2z+5=z$ équivaut à $z^2+z+5=0$. Le discriminant du trinôme $z^2+z+5$ est $\Delta=1^2-4\times1\times5=-19<0$ donc ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}\qquad\text{et}\qquad\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $z^2+2z+5=z$ est $\left\{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{19}}{2};-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{19}}{2}\right\}$.

*Autre méthode.* — On vérifie que

$$(-1+2\mathrm{i})^2+2(-1+2\mathrm{i})+5=1-4\mathrm{i}-4-2+4\mathrm{i}+5=0\neq-1+2\mathrm{i}$$

donc $-1+2\mathrm{i}$ n'est pas solution de $z^2+2z+5=z$.

**4.** VRAI. Soit $z=x+\mathrm{i}y$ un complexe écrit sous forme algébrique. Alors,

$$\frac{z}{z+4}=\frac{x+\mathrm{i}y}{(x+4)+\mathrm{i}y}=\frac{(x+\mathrm{i}y)[(x+4)-\mathrm{i}y]}{(x+4)^2+y^2}=\frac{x(x+4)-\mathrm{i}xy+\mathrm{i}y(x+4)+y^2}{(x+4)^2+y^2}$$

donc la partie réelle de $\frac{z}{z+4}$ est $\frac{x(x+4)+y^2}{(x+4)^2+y^2}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\frac{z}{z+4}\in\mathrm{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{x(x+4)+y^2}{(x+4)^2+y^2}=0&\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+4)+y^2=0\\(x+4)^2+y^2\neq0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+y^2=0\\(x\,;y)\neq(-4\,;0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2-4+y^2=0\\(x\,;y)\neq(-4\,;0)\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}(x-(-2))^2+(y-0)=2^2\\(x\,;y)\neq(-4\,;0)\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ tels que $\frac{z}{z+4}$ est imaginaire pur est le cercle de centre $\Omega\,(-2\,;0)$ et de rayon 2 privé du point d'affixe $-4$.

**5.** FAUX. Si on prend $(u_n)$ et $(w_n)$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n+1$ et $w_n = n+2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < w_n$. Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

## Exercice 3

**1. a.** Voir l'annexe.

**b.** On peut conjecturer que $(u_n)$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**2. a.** La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2}.$$

Or, pour tout $x > 0$, $x+1 > 0$ et $2x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in ]0\,;1]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1\,;+\infty[$. On conclut donc que $\boxed{f \text{ est décroissante sur } ]0\,;1] \text{ et croissante sur } [1\,;+\infty[}$.

Il s'ensuit que le minimum de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ est $f(1) = 1$.

**b.** On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \geqslant 1$ ».

Comme $u_0 = 4 \geqslant 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, $u_k \geqslant 1$ donc, comme $f$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$, $f(u_k) \geqslant f(1)$ i.e. $u_{k+1} \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1}$.

**3. a.** Soit un réel $x \geqslant 1$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{2x^2}. \end{aligned}$$

Or, comme $x \geqslant 1$, $1 - x \leqslant 0$, $1 + x \geqslant 0$ et $2x^2 > 0$ donc $f(x) - x \leqslant 0$ et ainsi $f(x) \leqslant x$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 1,\ f(x) \leqslant x}$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question **2.b.**, $u_n \geqslant 1$ donc, d'après la question **3.a.**, $f(u_n) \leqslant u_n$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

**c.** On a vu que $(u_n)$ est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème des suites monotones, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 1}$.

**4. a.** Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \geqslant 1$ donc, comme $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right)$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right)$. Mais, par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par unicité de la limite de $(u_{n+1})$, on conclut que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right)$ donc $\boxed{\ell \text{ est solution de l'équation } (E)}$.

**b.** Pour tout réel $x \neq 0$,

$$(E) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{R}^* \text{ est } \{-1, 1\}}$.

Comme $\ell$ est une solution de $(E)$ et $\ell \geqslant 1$, $\boxed{\ell = 1}$.

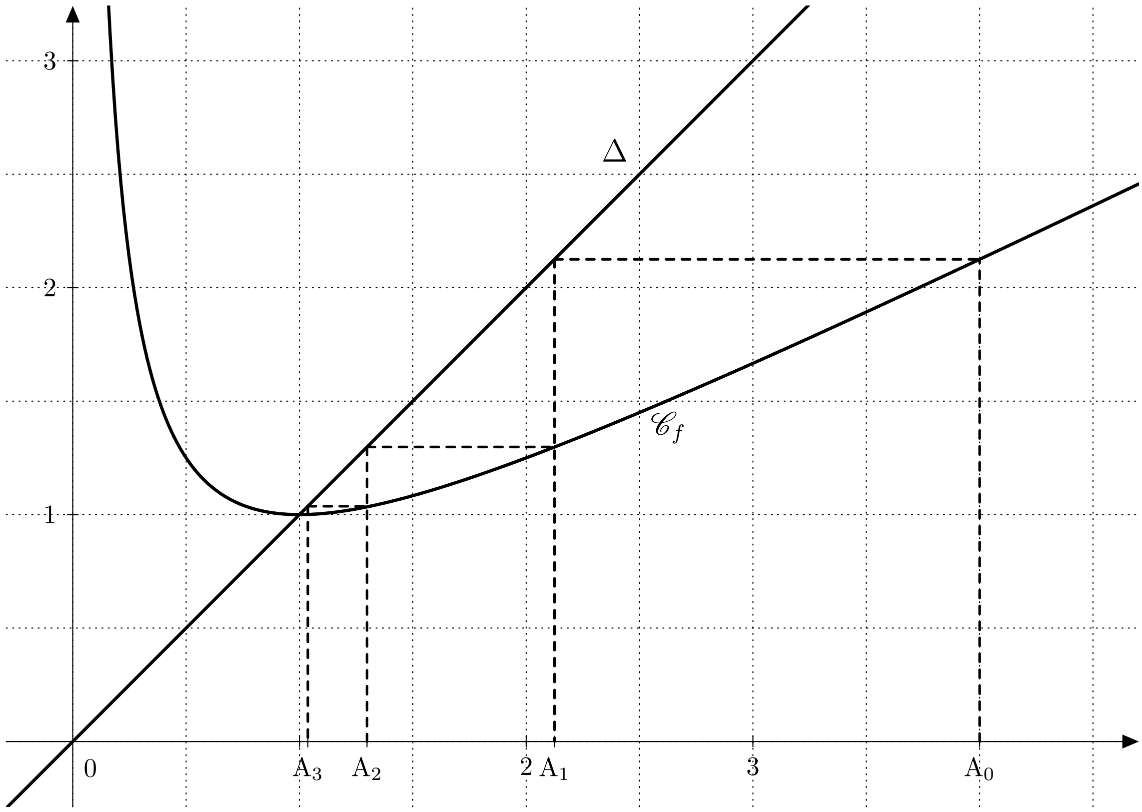
**5. a.** Voir l'annexe.

**b.** En calculant à l'aide de la calculatrice les premières valeurs de $(u_n - 1)$, on constate que $u_n - 1 \geqslant 10^{-6}$ pour tout $n \leqslant 4$ et $u_5 - 1 \approx 0{,}000000159 < 10^{-6}$ donc la valeur obtenue en sortie est 5.

**NOM : ........................ Prénom : ........................ Classe : TS...**

# Annexe – À rendre avec sa copie

**Exercice 3 – Question 1.b.**




**Exercice 3 – Question 4.a.**

| | | |
|---|---|---|
| Entrée | : | $E$ est un réel strictement positif |
| Initialisation | : | Donner à $U$ la valeur 4 |
| | | Donner à $N$ la valeur 0 |
| Traitement | : | Tant que $\boldsymbol{U-1>E}$ |
| | | Donner à $U$ la valeur $\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(U+\frac{1}{U}\right)}$ |
| | | Donner à $N$ la valeur $\boldsymbol{N+1}$ |
| | | Fin Tant que |
| Sortie | : | Afficher $\boldsymbol{N}$ |