BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 9

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire Z sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

b. En déduire le module et un argument de Z puis une forme trigonométrique de Z.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ ainsi que le point C, milieu du segment [OB], d'affixe z_{C}.

a. Déterminer une forme exponentielle de z_{A}, z_{B} et z_{C}.

b. Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et E le point tel que DABE soit un parallélogramme.

Démontrer que $z_{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ puis que $\mathrm{OE} = \mathrm{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4. Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 2 **4 points**

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.
Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

1. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

2. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet évènement.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement G.

c. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 3 **6 points**

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

5. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P est un réel strictement positif
Initialisation :	Donner à X la valeur 0 et à Y la valeur -5
Traitement :	Tant que $Y < 0$
	Donner à X la valeur $X + P$
	Donner à Y la valeur $g(X)$
Sortie :	Afficher $X - P$ et X

a. On entre une valeur de P égale à 0,1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

b. On a fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P. On a obtenu en sortie les nombres 0,94 et 0,95. Quelle valeur de P avait-on choisie en entrée ?

c. On entre une valeur de P égale à 0,001. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

Partie B. – Etude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x-5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

b. Etudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

Exercice 4 **5 points**

Partie A. – Restitution organisée de connaissance

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$ alors $ac \equiv bd \pmod n$.

Partie B. – Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation (E) : $23x - 26y = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\,;-8)$ est solution de l'équation (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire un entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $23a \equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C. – Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1\ ;\ x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 $(x_1\ ;\ x_2)$ est transformé en $(y_1\ ;\ y_2)$ tel que :

$$(S_1)\ \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leqslant y_1 \leqslant 25 \text{ et } 0 \leqslant y_2 \leqslant 25.$$

Étape 3 $(y_1\ ;\ y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape1}}{\Longrightarrow} (19, 4) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (13, 19) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.
2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :
   a. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :
   $$(S_2)\ \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$
   b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système
   $$(S_3)\ \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$
   c. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1)
   d. Décoder le mot YJ.