BACCALAUREAT BLANC

# MATHEMATIQUES

**Série S**

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

**Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7**



Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**EXERCICE 1** **5 points**

Soit $f$ la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

**1. Étude d'une fonction auxiliaire**

**a.** Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction $g$ puis la limite de $g$ en $+\infty$.
En déduire le tableau de variation de $g$ sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** Démontrer qu'il existe un unique réel $a$ appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que $a$ appartient à l'intervalle $]0{,}703\,;0{,}704[$.

**c.** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

**2. Étude de la fonction *f***

**a.** Déterminer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.

**b.** On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel strictement positif $x$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

**c.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**d.** Démontrer que la fonction $f$ admet pour minimum le nombre réel

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

**e.** Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point $M$ d'affixe $z$ tel que $M$ n'appartient pas à (OA), on associe le point $M'$ d'affixe $z' = -\mathrm{i}z$.
On désigne par $I$ le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point $M$ n'appartenant pas à (OA), $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 1) et que la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 2).

**1.** Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

**a.** Déterminer la forme algébrique de $z$.

**b.** Montrer que $z' = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
Déterminer le module et un argument de $z'$.

**c.** Placer les points A, B, $M$, $M'$ et $I$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite $(\mathrm{O}I)$.
Sur cet exemple, les propriétés 1 et 2 vous semblent-elles graphiquement vérifiées ?

**2.** On revient au cas général où $M$ est un point quelconque d'affixe $z$ tel que $M$ n'appartient pas à (OA).

**a.** Déterminer l'affixe $z_I$ du point $I$ en fonction de $z$.

**b.** Démontrer que $\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I} = -2\mathrm{i}$.

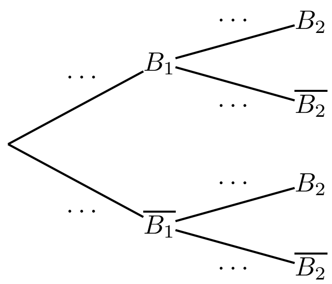
**c.** Démontrer la propriété 1.

**d.** Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que $(\overrightarrow{\mathrm{O}I}\,,\overrightarrow{\mathrm{B}M'}) = \arg\left(\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I}\right)\ [2\pi]$.
En déduire la propriété 2.

**Exercice 3** **5 points**

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne $U_1$ contient 12 boules blanches et 3 boules noires et l'urne $U_2$ contient 2 boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard dans $U_1$ et on la place dans $U_2$. On tire ensuite, au hasard, une boule dans $U_2$. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note $B_1$ l'évènement « on a tiré une boule blanche dans l'urne $U_1$ ».
On note $B_2$ l'évènement « on a tiré une boule blanche dans l'urne $U_2$ ».

1. **a.** Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :




   **b.** Démontrer que la probabilité de l'évènement $B_2$ est égale à $\dfrac{7}{10}$.

   **c.** La boule tirée dans $U_2$ est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche dans $U_1$ ?

**Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.**

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   **a.** Montrer que les valeurs possibles de $X$ sont 4 et $-8$.

   **b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable $X$.

   **c.** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

   **d.** Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe $n$ fois de suite à ce jeu. Au début de chaque épreuve, l'urne $U_1$ contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne $U_2$ contient 2 boules blanches et 1 noire. Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier $n$ pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement $B_2$ soit supérieure ou égale à 0,99.

**Exercice 4** **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1** : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x \sin(x) = 0$.

2. Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
**Affirmation 2** : la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales.

3. Soit $u$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $u(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g$ la fonction définie par $g(x) = \sqrt{u(x)}$.
**Affirmation 3** : pour tout réel $x$, $g'(x) = \dfrac{4x-4}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$.

4. On considère la fonction $h$ définie pour tout réel $x$ par $h(x) = 2x\cos(2x)$ et on note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
**Affirmation 4** : la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

5. **Affirmation 5** : dans l'intervalle $]0\,;2\pi]$, l'ensemble des solutions de l'équation $2(\cos x)^2 + 7\cos x - 4 = 0$ est $\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.