BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 9

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   - **a.** Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par
   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$
   Étudier le sens de variation de la fonction g puis la limite de g en $+\infty$.
   En déduire le tableau de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.
   - **b.** Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $]0{,}703\,;0{,}704[$.
   - **c.** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   - **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   - **b.** On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   - **c.** En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   - **d.** Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$
   - **e.** Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe z tel que M n'appartient pas à (OA), on associe le point M' d'affixe $z' = -\mathrm{i}z$.
On désigne par I le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 1) et que la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de z.
   - **b.** Montrer que $z' = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de z'.
   - **c.** Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite $(\mathrm{O}I)$.
   Sur cet exemple, les propriétés 1 et 2 vous semblent-elles graphiquement vérifiées ?
2. On revient au cas général où M est un point quelconque d'affixe z tel que M n'appartient pas à (OA).
   - **a.** Déterminer l'affixe z_I du point I en fonction de z.
   - **b.** Démontrer que $\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I} = -2\mathrm{i}$.
   - **c.** Démontrer la propriété 1.
   - **d.** Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que $(\overrightarrow{\mathrm{O}I}\,,\overrightarrow{\mathrm{B}M'}) = \arg\left(\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I}\right)\ [2\pi]$.
   En déduire la propriété 2.

EXERCICE 3 **5 points**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de nombres entiers relatifs, solutions de l'équation

$$(E):\ 8x - 5y = 3.$$

b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p\,;q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p+1$ et $m = 5q + 4$.

Montrer que le couple $(p\,;q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?

3. Soit a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b. Démontrer que 7 divise N si et seulement si $b \equiv a$ (modulo 7).

c. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1** : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \sin(x) = 0$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 : la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales.

3. Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 2x^2-4x+3$ et g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{u(x)}$.

Affirmation 3 : pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{4x-4}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$.

4. On considère la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 2x\cos(2x)$ et on note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Affirmation 4 : la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

5. **Affirmation 5** : dans l'intervalle $]0\,;2\pi]$, l'ensemble des solutions de l'équation $2(\cos x)^2 + 7\cos x - 4 = 0$ est $\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.