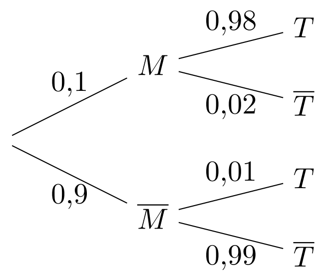
Corrigé du baccalauréat blanc 2016

Exercice 1

Partie A

1. La situation peut être représentée par l'arbre pondéré suivant.



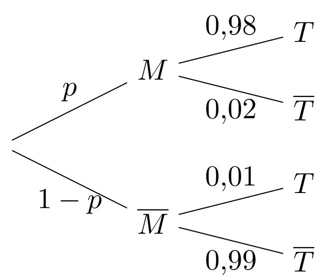
2. D'après l'arbre, $\mathrm{P}(M \cap T) = 0{,}1 \times 0{,}98$ soit $\boxed{\mathrm{P}(M \cap T) = 0{,}098}$.

3. D'après l'arbre, $P(T) = 0{,}1 \times 0{,}98 + 0{,}9 \times 0{,}01 = 0{,}098 + 0{,}009$ soit $\boxed{P(T) = 0,107}$.

4. On cherche $P_T(M)$. Or, par définition, $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}098}{0{,}107}$ soit $\boxed{P_T(M) \approx 0{,}916}$.

Partie B

1. La situation peut être représentée par l'arbre pondéré suivant.



D'après l'arbre, $P(T) = p \times 0{,}98 + (1-p) \times 0{,}01 = 0{,}97p + 0{,}01$. Dès lors,

$$f(p) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{p \times 0{,}98}{0{,}97p + 0{,}01} = \frac{0{,}98p \times 100}{(0{,}97p + 0{,}01) \times 100}$$

soit, finalement, $\boxed{f(p) = \dfrac{98p}{97p + 1}}$.

2. Le test est fiable si et seulement si $f(p) \geqslant 0{,}95$. Or, comme $97p + 1 > 0$,

$$f(p) \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 98p \geqslant 0{,}95(97p+1) \Leftrightarrow 98p \geqslant 92{,}15p + 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 5{,}85p \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{0{,}95}{5{,}85} \Leftrightarrow p \geq \frac{17}{119}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{le test est fiable lorsque } p \text{ est supérieur à environ } 0{,}16}$.

Partie C

1. Choisir une personne au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,15 en prenant comme succès « la personne est atteinte par le virus ». Puisqu'on assimile le choix de 100 personnes au hasard à un tirage avec remise, ce choix revient à répéter 100 fois cette épreuve de Bernoulli de façon indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli. On en déduit que la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,15.
2. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X=10) \approx 0{,}04$.
3. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 15) \approx 0{,}57$.

Exercice 2 (spécialité)

Partie A

1. $u_1 = 5\times 0+1 = 1$, $u_2 = 5\times 1+1 = 6$ et $u_3 = 5\times 6+1 = 31$. Comme $-5u_2+u_3 = 1$, d'après le théorème de Bézout, $\boxed{\mathrm{PGCD}(u_2, u_3) = 1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par définition, $u_{n+1} = 5u_n+1$ donc $u_{n+1}-5u_n = 1$. Dès lors, d'après le théorème de Bézout, $\boxed{u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}}$.
3. Soit la proposition P_n : « $4u_n = 5^n - 1$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
   Comme $5^0 - 1 = 1-1 = 0 = 4u_0$, la proposition P_0 est vraie.
   Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
   Alors, $4u_{k+1} = 4(5u_k+1) = 5(4u_k)+4 = 5(5^k-1)+4 = 5\times 5^k - 5+4 = 5^{k+1}-1$ donc P_{k+1} est vraie.
   On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 5^n - 1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathrm{PGCD}(5^{n+1}-1, 5^n-1) = \mathrm{PGCD}(4u_{n+1}, 4u_n) = 4\mathrm{PGCD}(u_{n+1}, u_n)$. Or, d'après la question 2, $\mathrm{PGCD}(u_{n+1}, u_n) = 1$ donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(5^{n+1}-1, 5^n-1) = 4}$.

Partie B

1. **a.** Étant donné que $a^{n+1} = a^n \times a$,
   $$(a^{n+1}-1)\times 1 + (a^n-1)\times(-a) = a^{n+1}-1-a^{n+1}+a = a-1$$
   donc $\boxed{\text{le couple } (u\,;v) = (1\,;-a) \text{ convient}}$.

   b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $a = 1+(a-1)$, $a \equiv 1\ [a-1]$ donc $a^k \equiv 1^k\ [a-1]$ i.e. $a^k \equiv 1\ [a-1]$ et donc $a^k - 1 \equiv 0\ [a-1]$. Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ a-1 \text{ divise } a^k-1}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que $a-1$ divise a^n-1 et $a^{n+1}-1$ et alors, par théorème, la question 1.a. assure que $\boxed{\mathrm{PGCD}(a^{n+1}-1, a^n-1) = a-1}$.

2. **a.** Par définition, d divise a^m-1 donc $a^m-1 \equiv 0\ [d]$ et ainsi $\boxed{a^m \equiv 1\ [d]}$. On justifie de même que $\boxed{a^n \equiv 1\ [d]}$.

   b. Comme m et n sont premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence de deux entiers u et v tels que $mu+nv = 1$.
   Si $m = 0$ alors $nv = 1$ donc, comme $n \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Ainsi, en posant $s = 0$ et $t = v$, on a bien deux entiers naturels tels que $nt = 1+ms$.
   De même, si $n = 0$ alors $mu = 1$ et on peut poser $s = u$ et $t = 0$ et alors $ms = 1+nt$.
   Supposons à présent que $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Si $u > 0$ et $v > 0$ alors $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$ donc $mu+nv \geqslant m+n \geqslant 2$ ce qui est absurde puisque $nu+nv = 1$. De même, si $u < 0$ et $v < 0$ alors $mu+nv \leqslant -m-n < 0$. Ainsi, u et v sont de signe contraire. Si $u \geqslant 0$ et $v \leqslant 0$, on pose $s = u$ et $t = -v$ ce qui donne $ms = 1+nt$ et si $u \leqslant 0$ et $v \geqslant 0$, on pose $s = -u$ et $t = v$ ce qui donne $nt = 1+ms$.
   Ainsi, dans tous les cas, <u>il existe des entiers naturels t et s tels que $ms = 1+nt$ ou $nt = 1+ms$</u>.

c. Supposons qu'il existe deux entiers naturels t et s tels que $ms = 1 + nt$. Alors, $a^{ms} = a^{1+nt}$ Or, $a^{ms} = (a^m)^s \equiv 1^s\ [d] \equiv 1\ [d]$ et $a^{1+nt} = a \times (a^n)^t \equiv a \times 1^t\ [d] \equiv a\ [d]$. On en déduit donc que $a \equiv 1\ [d]$. Le raisonnement est analogue si $nt = 1 + ms$. Ainsi, dans tous les cas, $a - 1 \equiv 0\ [d]$ donc d divise $a - 1$. Or, d'après la question 1.b, $a - 1$ divise $a^n - 1$ et $a^m - 1$ donc $a - 1$ divise d. Comme $d > 0$ et $a - 1 > 0$, on conclut que $\boxed{d = a - 1}$.

Exercice 2 (spécifique)

Partie A

1. $z_1 = (1 + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = \sqrt{3} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} + 1$ soit $\boxed{z_1 = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)}$.

2. $|z_0| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$ et $z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$. Dès lors, $\boxed{z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

Par ailleurs, $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

donc $\boxed{1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

On en déduit que $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)}$ soit $\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}\right)}}$.

3. On déduit des questions précédentes que

$$z_1 = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

En identifiant les parties réelles, on en déduit que

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1 \quad \text{soit} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}^2}$$

ce qui donne finalement $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$.

Partie B

1. $u_0 = |z_0| = 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + \mathrm{i})z_n| = |1 + \mathrm{i}|\,|z_n| = \sqrt{2}u_n.$$

Ainsi, $\underline{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \sqrt{2} \text{ et de premier terme } u_0 = 2}$.

3. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times (\sqrt{2})^n$ c'est-à-dire $\boxed{u_n = 2(\sqrt{2})^n}$.

4. Comme $\sqrt{2} > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

5.

Variables :	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Tant que $u \leqslant p$
	u prend la valeur $u\sqrt{2}$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Exercice 3

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1}$.

On déduit de cette dernière limite que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $g'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}$. Or, la fonction exp est à valeur strictement positives donc, pour tout réel x, $g'(x) > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\times\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\times 2} - 2\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\times 2}$$

et donc, finalement, comme $\mathrm{e}^0 = 1$, $\boxed{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(x) - g(x) = \mathrm{e}^x - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1$. Or, d'après la question 3.a, $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 2$ donc

$$f(x) - g(x) = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 2 - 1 = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 1.$$

Étant donné que le carré d'un réel est un nombre positif, on en déduit que $\boxed{f(x) - g(x) \geqslant 1}$. Il s'ensuit que l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en un point d'abscisse x donnée est toujours supérieur ou égal à 1.

Partie B

1. a. Pour tout réel x, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 1$. Or, par théorèmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(x-1)\mathrm{e}^x = +\infty$ et ainsi, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty}$.

b. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = [1 + (x-1)] \times 2\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x.$$

Comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, le signe de $\varphi'(x)$ est le signe de x. Ainsi, $\boxed{\varphi'(x) < 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;0[,\ \varphi'(x) > 0 \text{ si } x \in]0\,;+\infty[\text{ et } \varphi'(0) = 0}$.

c. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de φ	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. a. Sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$, la fonction φ est continue car dérivable et strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1$ donc $0 \in \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\,;\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right]$. On déduit alors du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty\,;0]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx -1{,}68}$.

c. Notons T_f la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E et T_g la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.
Une équation de T_f est $y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ i.e. $y = \mathrm{e}^{\alpha}(x-\alpha)+\mathrm{e}^{\alpha}$ soit $y = \mathrm{e}^{\alpha}x-(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}$.
De même, une équation de T_g est $y = g'(\alpha)(x-(-\alpha))+g(\alpha)$ i.e. $y = \mathrm{e}^{-(-\alpha)}(x+\alpha)+1-\mathrm{e}^{-(-\alpha)}$ soit $y = \mathrm{e}^{\alpha}x+(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1$.
Or, $\varphi(\alpha) = 0$ donc $2(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1 = 0$ donc $(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1 = -(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}$. Ainsi, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\alpha}x-(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha}x+(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1$ donc $T_f = T_g$. Or, par définition, T_f passe par E, T_g passe par F et $\mathrm{E} \neq \mathrm{F}$ car $\alpha \neq 0$ donc $T_f = T_g = (\mathrm{EF})$.
On conclut donc que $\boxed{\text{la droite (EF) est une tangente commune aux deux courbes } \mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g}$.

Exercice 4

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1} = \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-2x})}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{x}\times\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

L'affirmation est VRAIE.

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $\mathrm{e}^{2\times(-3)}+2\mathrm{e}^{-3}-3 \approx 2{,}9$ donc -3 n'est pas solution de $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-3 = 0$.
L'affirmation est FAUSSE.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = (1-x)\mathrm{e}^{x} = -\infty$. Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^{x} = e > 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(1-x)\mathrm{e}^{x} = 0^+$. Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
L'affirmation est VRAIE.

Partie B

4. Réponse b).

En effet, $g = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x^2+1$ donc $g = -\dfrac{\frac{u'}{2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}^2} = -\dfrac{u'}{2u\sqrt{u}}$. Ainsi, pour tout réel x, $g'(x) = -\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$ et donc, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{x^2+1}$, on obtient, pour tout réel x, $g'(x) = -\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}^2(x^2+1)} = -\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$.

5. Réponse b).

En effet, une équation de la tangente T cherchée est $y = h'(1)(x-1) + h(1)$. Or, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{-2\mathrm{e}^x(x+1) + 2\mathrm{e}^x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ donc $h'(1) = \dfrac{-2\mathrm{e}}{2^2} = -\dfrac{e}{2}$ et $h(1) = \dfrac{-2e}{2} = -e$. Ainsi, une équation de T est $y = -\dfrac{e}{2}(x-1) - e$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{1}{2}(e+1)$.

6. Réponse b).

En effet, le plan (IEC) est le plan (EAC). Or, l'intersection de (EAC) avec le plan (ABC) est la droite (AC). Comme J n'appartient pas à (AC) et mais appartient au plan (ABC), on en déduit que J n'appartient pas au plan (EAC)=(IEC). Ainsi, les droites (IJ) et (EC) ne sont pas coplanaires.