BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **4 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A. — Un groupe de vingt personnes décide d'aller au cinéma dans un grand multiplex deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le second samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

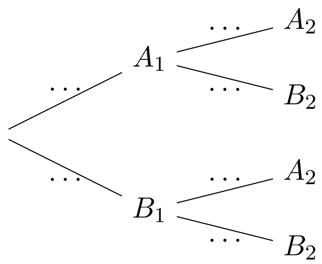
Après la seconde séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le second samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le second samedi ».

1. **a.** Quelle est la probabilité $P(A_1)$ de l'évènement A_1 ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

   b. Quelle est la probabilité $P_{A_1}(A_2)$ de l'évènement A_2 sachant que l'évènement A_1 est réalisé ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

   c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant.



   d. Quelle est la probabilité que la personne ait vu le film A le premier samedi et le film B le second samedi ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

   e. Montrer que la probabilité de A_2 est $P(A_2) = \frac{7}{10}$.

   f. Sachant que la personne a vu le film B le second samedi, quelle est la probabilité qu'elle ait vu le film A le premier samedi ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Partie B. — Le cinéma propose une carte d'abonnement. Une étude statistique a permis de montrer que 34% des clients du cinéma possèdent cette carte. Un samedi soir, on choisit 10 clients du cinéma au hasard. Le grand nombre de salles du multiplex permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients possédant la carte d'abonnement parmi les dix clients choisis.

1. Déterminer, en détaillant sa réponse, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement la moitié des 10 clients possèdent la carte d'abonnement. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
3. Déterminer la probabilité que plus de la moitié des 10 clients possèdent la carte d'abonnement. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Le traitement d'une maladie nécessite la perfusion pendant une longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{90}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre, t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A. — Étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 91.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=13\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{90}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 14. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B. — Étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{110}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{110g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x}{15}\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}-1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0		$+\infty$
Variations de g	0	$\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x)=6{,}2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;20]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C. — Détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 14.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 110, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

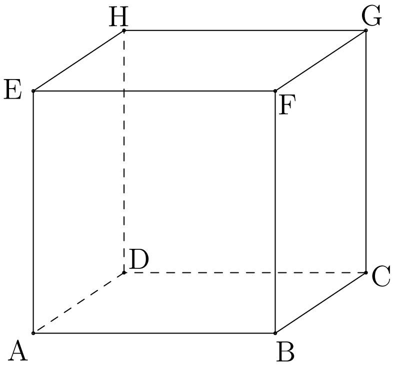
$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{90}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 110.
   a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 6,2 micromoles par litre.
   Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement. On arrondira à l'entier le plus proche.

Exercice 3 — 3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} + 3\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = -4\mathrm{i}$.
   Affirmation 1 : Les points A, B et C sont alignés.
2. On considère le nombre complexe $z = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})^8$.
   Affirmation 2 : $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z.
3. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre. On note L le point de [EH] tel que $\mathrm{EL} = \frac{2}{3}\mathrm{EH}$.
   Affirmation 3 : la section du cube par le plan (ACL) est un triangle.
4. On conserve les notations de la question précédente et on note M un point quelconque de la face EFGH différent de L.
   Affirmation 4 : la droite (BF) est orthogonale à la droite (LM).



Exercice 4 — 3 points

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On note, de plus, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Soit A l'un des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On note T_f la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A et T_g la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A.
   Que peut-on dire des droites T_f et T_g ?

EXERCICE 5 **5 points**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3^n$.

Partie A. — Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	6	3
4	2	19	9
5	3	56	27
6	4	165	81

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13, Florent obtient les résultats suivants :

12	10	118 107	59 049
13	11	354 304	177 147
14	12	1 062 893	531 441
15	l3	3 188 658	1 594 323

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B. — Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2 \times 3^n + n - 1$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 10 millions.

Partie C. — Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 2.

2. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant \dfrac{n}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.