Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 21/05/2016

Exercice 1 **5 points**

Partie A

	Sujet A	Sujet B
Question 1	b)	C)
Question 2	a)	F)
Question 3	c)	H)
Question 4	b)	J)

Explications

1. La probabilité cherchée est

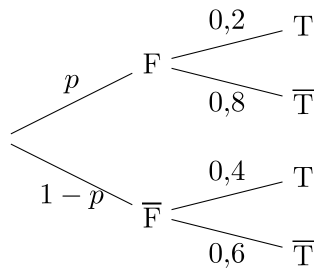
$$P_{(X\geqslant 15)}(X \geqslant 25) = P_{X\in[15;30]}(X \in [25\,;30]) = \frac{\frac{30-25}{30-0}}{\frac{30-15}{30-0}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

2. Sachant que

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 30) &= \int_0^{30} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{30} \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-30\lambda} - (-\mathrm{e}^{0})\right) = 1 - \mathrm{e}^{-30\lambda} \end{aligned}$$

on a $1 - \mathrm{e}^{-30\lambda} = 0{,}2$ donc $\mathrm{e}^{-30\lambda} = 0{,}8$ et ainsi $-30\lambda = \ln(0{,}8)$ donc $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}8)}{-30} \approx 0{,}007$.

3. Notons p la probabilité cherchée. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales, $P(\mathrm{T}) = 0{,}2p + 0{,}4(1-p) = 0{,}4 - 0{,}2p$. Or, l'énoncé précise que $P(\mathrm{T}) = 0{,}31$ donc $0{,}4 - 0{,}2p = 0{,}31$ et ainsi $p = \dfrac{0{,}4 - 0{,}31}{0{,}2} = 0{,}45$.

4. La vitesse moyenne du mobile est la valeur moyenne de la fonction v sur $[0\,;10]$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{10-0}\int_0^{10} 1{,}5t + 2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\left[1{,}5\frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^{10} = \frac{1{,}5}{10} \times \frac{10^2}{2} + 2 \times 10 = 9{,}5.$$

Partie B. — L'affirmation est vraie. En effet, pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x\cos(x) \leqslant x$ et, comme $x^2+1 > 0$, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\dfrac{-x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et, de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0}$.

Exercice 2 **5 points**

1. $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}0-1\,;\dfrac{1}{2}-1\,;1-\dfrac{3}{4}\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}-1\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\begin{pmatrix}1-1\,;0-1\,;-\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{\text{MP}}\,(0\,;-1\,;-2)}$

   Ainsi, $x_{\overrightarrow{\text{MN}}}\times y_{\overrightarrow{\text{MP}}}=-1\times(-1)=1\neq 0=0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=x_{\overrightarrow{\text{MP}}}\times y_{\overrightarrow{\text{MN}}}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ ne sont pas proportionnelles et donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On conclut que $\boxed{\text{les points M, N et P ne sont pas alignés}}$.

2. On considère l'algorithme ci-contre.

   a.

L2 : d prend la valeur -1
L3 : e prend la valeur $-\dfrac{1}{2}$
L4 : f prend la valeur $\dfrac{1}{4}$
L5 : g prend la valeur 0
L6 : h prend la valeur -1
L7 : i prend la valeur -2
L8 : k prend la valeur $-1\times 0+-\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times(-2)=0$
L9 : Afficher 0

   b. Le résultat affiché par l'algorithme est le produit scalaire de $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$.

   Comme, ici, ce produit scalaire est nul, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires et ainsi <u>MNP est un triangle rectangle en M</u>.

   c. On peut modifier l'algorithme comme suit :

   ```
   L9  : l prend la valeur d² + e² + f²
   L10 : m prend la valeur g² + h² + i²
   L11 : Si k = 0 et l = m alors
   L12 :   | Afficher « le triangle est isocèle rectangle en M »
   L13 :   | Sinon
   L14 :   | Afficher « le triangle n'est pas isocèle rectangle en M »
   L15 : Fin Si
   ```

3. **a.** Puisque $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MN}}=5\times(-1)+(-8)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\times\frac{1}{4}=-5+4+1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MP}}=5\times 0+(-8)\times(-1)+4\times(-2)=8-8=0$, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ du plan (MNP) donc $\boxed{\vec{n}\text{ est normal au plan (MNP)}}$.

   b. On en déduit que, pour tout point $T\,(x\,;y\,;z)$ de l'espace,

$$\begin{aligned}T\in(\text{MNP})&\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{N}T}\cdot\vec{n}=0\\&\Leftrightarrow(x-0)\times 5+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\times(-8)+(z-1)\times 4=0\\&\Leftrightarrow 5x-8y+4+4z-4=0\\&\Leftrightarrow 5x-8y+4z=0\end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (MNP) est }5x-8y+4z=0}$.

c. Comme F a pour coordonnées $(1\,;0\,;1)$, une représentation paramétrique de Δ est

$$\boxed{\begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 1+4t \end{cases}}.$$

4. a. Pour déterminer les coordonnées de K, résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \\ 5x-8y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \\ 5(1+5t)-8(-8t)+4(1+4t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \\ 105t+9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\dfrac{3}{7} \\ y = \dfrac{24}{35} \\ z = 1-\dfrac{12}{35} \\ t = -\dfrac{3}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{7} \\ y = \dfrac{24}{35} \\ z = \dfrac{23}{35} \\ t = -\dfrac{3}{35} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées du point K sont } \left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{24}{35}\,;\dfrac{23}{35}\right)}$.

Remarque. — On pouvait aussi vérifier que les coordonnées du point données par l'énoncé satisfont à la fois l'équation de (MNP) et la représentation paramétrique de Δ car Δ étant dirigé par $\overrightarrow{n}$, elle est sécante à (MNP) donc l'intersection de (MNP) et Δ ne contient qu'un seul point.

b. La droite Δ est dirigée par $\overrightarrow{n}$ donc elle est orthogonale à (MNP). On en déduit que [FK] est la hauteur de MNPF issue de F. Ainsi, le volume de MNPF est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{aire}(MNP) \times \text{FK}.$$

Or, d'une part, $\text{MN} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{21}{16}} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$ et , d'autre part, $\text{MP} = \sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ donc, comme MNP est rectangle en M,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{1}{24} \times \sqrt{\frac{21 \times 5 \times 27}{35}} = \frac{1}{24} \times \sqrt{81}$$

soit finalement $\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{3}{8}}$.

Exercice 3 (enseignement obligatoire) **5 points**

1. a. Posons $z = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Alors, $|z| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Ainsi,

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

donc $\boxed{z = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

b. Comme $z_1 = z \times 1 = z$, on en déduit que $\boxed{z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ et, comme $z_2 = z \times z_1 = z^2 = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}}$, on en déduit que $\boxed{z_2 = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

2. a. Considérons la proposition P_n : « $z_n = z^n$ ». Comme $z_0 = 1$ et $z^0 = 1$, la proposition P_0 est vraie. Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, par définition, $z_{k+1} = z.z_k = z.z^k = z^{k+1}$ donc P_{k+1} est vraie. Ainsi, on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z^n$. Dès lors, d'après la question 1.a, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n$ donc $\boxed{z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $A_0 = A_n$ donc O, A_0 et A_n sont alignés. Si $n > 0$, les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_0}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_n}\right) = 0\ [\pi]$. Or, $\overrightarrow{\mathrm{O}A_0} = \vec{u}$ donc O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}A_n}\right) = 0\ [\pi]$ c'est-à-dire $\arg(z_n) = 0\ [\pi]$ soit $n\dfrac{\pi}{6} = 0\ [\pi]$. Ainsi, O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi$ c'est-à-dire $n = 6k$.
Comme ceci reste vrai si $k = 0$, on conclut que <u>les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si n est un multiple de 6</u>.

3. a. Par théorème, $d_n = A_nA_{n+1}$.

b. On a $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$ donc $\boxed{d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. alors,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}}d_n.$$

Ainsi, la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $d_n = d_0q^n$ c'est-à-dire $\boxed{d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} |z_n|^2 + d_n^2 &= \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]^2 = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\ &= \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^{n+1} = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right]^2 = |z_{n+1}|^2 \end{aligned}$$

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}A_{n+1}^2 = \mathrm{O}A_n^2 + A_nA_{n+1}^2$. Dès lors, grâce à la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que <u>pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n</u>.

c. Voir page 8.

d. On sait que le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_5 donc A_5 se trouve sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA_6]$. À l'aide de la règle et du compas, on trace la médiatrice de $[OA_6]$ pour déterminer le centre I de $\mathscr{C}$ puis on trace $\mathscr{C}$ au compas. Ensuite, on sait que OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc A_5 se trouve sur la perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On peut tracer cette droite à la règle et au compas en créant au compas deux points B et C équidistants de A_4 sur (OA_4) puis en construisant la médiatrice Δ de [BC]. Le point A_5 est alors le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.

Exercice 3 (enseignement de spécialité) — 5 points

Partie A. — Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Le nombre 36 peut s'écrire $36 = 1+2+3+4+5+6+7+8$ donc 36 est triangulaire. De plus, $36 = 6^2$ donc 36 est le carré d'un entier.

2. a. Le nombre $1+2+\cdots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $1+2+\cdots+n = p^2$ c'est-à-dire $\dfrac{n(n+1)}{2} = p^2$ soit $n(n+1) = 2p^2$ ce qui est équivalent à $n^2+n-2p^2 = 0$.

b. Étant donné que, pour tous entiers n et p,

$$\begin{aligned} n^2+n-2p^2 = 0 &\Leftrightarrow 4(n^2+n-2p^2) = 0 \Leftrightarrow 4n^2+4n-8p^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2n)^2+4n+1-8p^2 = 1 \Leftrightarrow (2n+1)^2-8p^2 = 1, \end{aligned}$$

on déduit de la question a. que le nombre $1+2+\cdots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B. — Étude de l'équation diophantienne associée

1. On remarque que $1^2-8\times 0^2 = 1$ et $3^2-8\times 1^2 = 0$ donc $(1\,;0)$ et $(3\,;1)$ sont deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).

2. Supposons que $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs non nuls solution de (E). Alors, $x^2-8y^2 = 1$ donc $x\times x+y\times(-8y) = 1$ donc il existe deux entiers $u = x$ et $v = -8y$ tels que $xu+yv = 1$. D'après le théorème de Bézout, on conclut que $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont premiers entre eux}}$.

Partie C. — Lien avec le calcul matriciel

1. Puisque $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+8y \\ x+3y \end{pmatrix}$, on a $\boxed{x' = 3x+8y \text{ et } y' = x+3y}$.

2. Le déterminant de A est $\det A = 3\times 3-1\times 8 = 1$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$.

Comme $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x'-8y' \\ -x'+3y' \end{pmatrix}$ donc $\boxed{x = 3x'-8y' \text{ et } y = -x'+3y'}$.

3. Supposons que $(x\,;y)$ est solution de (E). Alors,

$$\begin{aligned} x'-8y'^2 &= (3x+8y)^2-8(x+3y)^2 \\ &= 9x^2+48xy+64y^2-8(x^2+6xy+9y^2) \\ &= x^2-8y^2 = 1 \end{aligned}$$

donc $(x'\,;y')$ est solution de (E). Réciproquement, supposons que $(x'\,;y')$ est solution de (E). Alors,

$$\begin{aligned} x-8y^2 &= (3x'-8y')^2-8(-x'+3y')^2 \\ &= 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8(x'^2-6x'y'+9y'^2) \\ &= x'^2-8y'^2=1 \end{aligned}$$

donc $(x\,;y)$ est solution de (E).

On a donc bien montré que $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;y')$ est solution de (E).

4. On a déjà remarqué de $(x_0\,;y_0)=(3\,;1)$ est solution de (E). Supposons que, pour un certain $k\in\mathbb{N}$, $(x_k\,;y_k)$ est solution de (E). Alors, d'après la question 3, les nombres x_{k+1} et y_{k+1} définis par $\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}$ sont solutions de (E) donc $(x_{k+1}\,;y_{k+1})$ est solution de (E). Ainsi, on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ (x_n\,;y_n) \text{ est solution de (E)}}$.

Partie D. — Retour au problème initial

Un nombre triangulaire $1+2+\cdots+n$ est le carré de p si et seulement si le couple $(2n+1\,;p)$ est solution de (E). Il suffit donc de trouver un indice n tel que $y_n\geqslant\sqrt{2016}\approx 44{,}9$. Or, $(x_1\,;y_1)=(17\,;6)$, $(x_2\,;y_2)=(99\,;35)$ et $(x_3\,;y_3)=(577\,;204)$ donc y_3 convient. Dans ce cas, $p=204$ donc $p^2=41616$ est un nombre triangulaire qui est aussi le carré d'un entier. (C'est inutile mais on peut vérifier que $41616=1+2+3+\cdots+288=\dfrac{288\times 289}{2}$.)

EXERCICE 4 — 5 points

Partie A

1. Étant donné que $f(0)=\dfrac{5}{1+\mathrm{e}^0}=\dfrac{5}{2}$, les coordonnées de A sont $\left(0\,;\dfrac{5}{2}\right)$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, inverse, somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x)=5\times\left(-\frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}\right)=\frac{15\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}.$$

Comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-3x}>0$ donc $f'(x)>0$. Ainsi, la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-3x=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-_{i}nfty}\mathrm{e}^X=0$ donc, par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x}=0$. Par somme et quotient, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=5$. Ainsi, <u>la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$</u>.

Partie B

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=5$ donc, pour tout réel x, $f(x)<5$. Par suite, pour tout réel x, $h(x)>0$.

Autre méthode. — Pour tout réel x,

$$h(x)=5-\frac{5}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=\frac{5(1+\mathrm{e}^{-3x})-5}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=\frac{5\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

Or, on a déjà justifié que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-3x}>0$ donc, pour tout réel x, $h(x)>0$.

2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$H'(x) = -\frac{5}{3} \times \frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 5 \times \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = h(x)$$

Ainsi, $\boxed{H \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3. En utilisant la question précédent,

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = H(a) - H(0) = -\frac{5}{3}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3a}\right) - \left[-\frac{5}{3}\ln\left(1+\mathrm{e}^{0}\right)\right] = -\frac{5}{3}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3a}\right) + \frac{5}{3}\ln(2)$$

et donc, grâce aux propriétés de ln, $\boxed{\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}}\right)}$.

4. **a.** Voir page 8.

b. L'aire, en unité d'aire, de $\mathcal{D}$ est la limite de $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers $+\infty$ c'est-à-dire la limite de $I_a := \dfrac{5}{3}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}}\right)$ quand a tend vers $+\infty$. Or, on a déjà vu que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-3a} = 0$ donc, par somme et quotient, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}} = 2$. Comme la fonction ln est continue en 2, on en déduit, par composition, que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}}\right) = \ln(2)$ et donc, par produit, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I_a = \frac{5}{3}\ln 2$. On conclut donc que $\boxed{\text{l'aire, en unité d'aire, de } \mathcal{D} \text{ est } \frac{5}{3}\ln 2}$.

Partie C. — L'aire, en unité d'aire, du triangle ABN rectangle en B est $\dfrac{\frac{5}{2}\times x_N}{2} = \dfrac{5x_N}{4}$. Ainsi, l'aire de ce triangle est égale à la moitié de celle de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\dfrac{5x_N}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{3}\ln 2 = \dfrac{5}{6}\ln 2$ c'est-à-dire si et seulement si $x_N = \dfrac{2}{3}\ln 2$.

Reste maintenant à s'assurer que si $x_N = \dfrac{2}{3}\ln 2$ alors la droite (AN) est située au-dessus de $\mathcal{C}$ pour être certain que le triangle ABN est inclus dans $\mathcal{D}$.

Pour cela, remarquons que l'équation réduite de (AN) est $y = \dfrac{y_N - y_A}{x_N - x_A}(x - x_A) + y_A = \dfrac{5-\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}\ln 2 - 0}x + \dfrac{5}{2}$ soit $y = \dfrac{15}{4\ln 2}x + \dfrac{5}{2}$.

Considérons alors la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par $d : x \mapsto \dfrac{15}{4\ln 2}x + \dfrac{5}{2} - f(x)$. La fonction d est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \geqslant 0$,

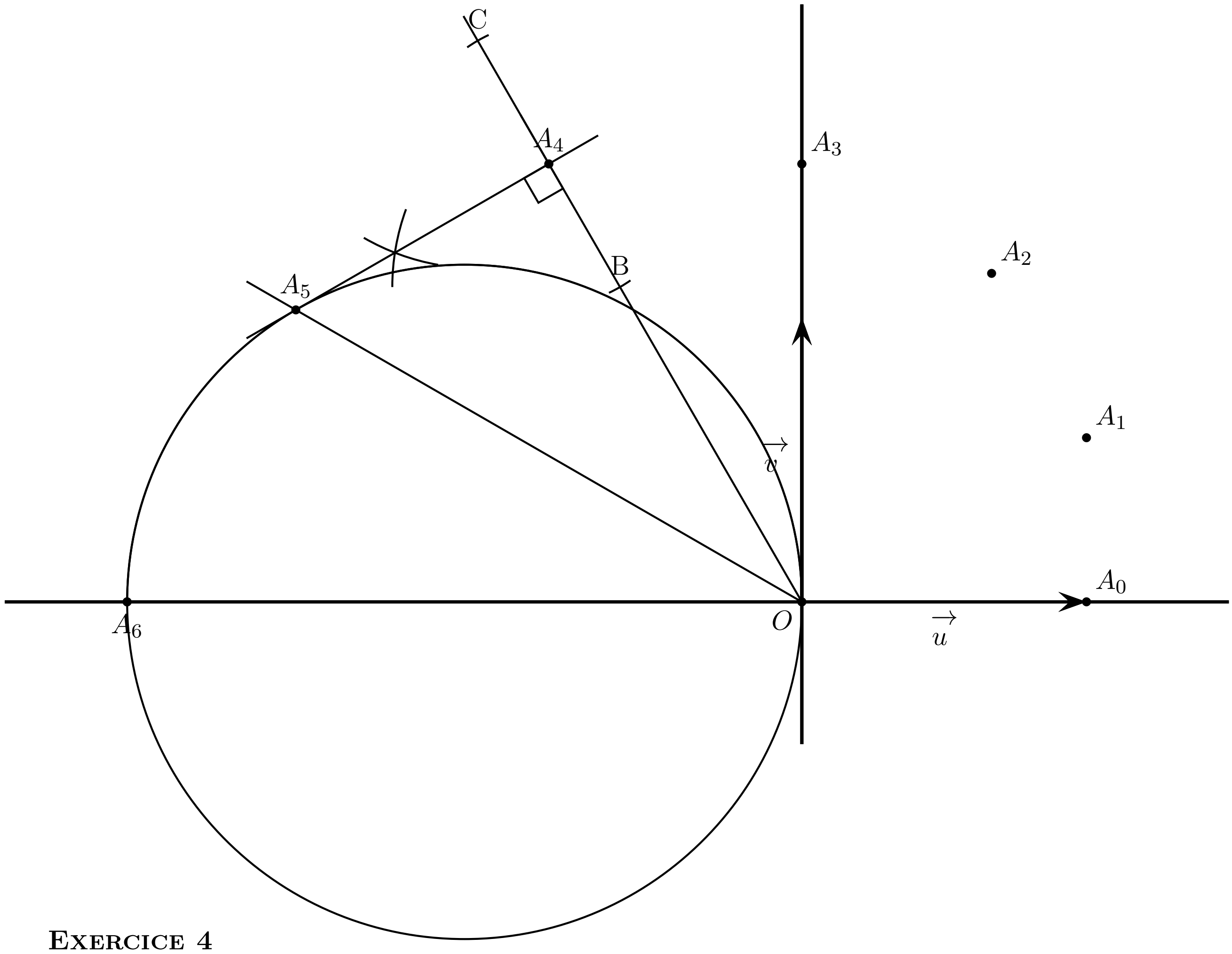
$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{15}{4\ln 2} - f'(x) = \frac{15}{4\ln 2} - \frac{15\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2} \\ &= 15 \times \frac{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2 - 4\ln 2\mathrm{e}^{-3x}}{4\ln 2(1+\mathrm{e}^{-3x})^2} \\ &= 15 \times \frac{X^2 + (2-4\ln 2)X + 1}{4\ln 2(1+X)^2} \end{aligned}$$

en posant $X = \mathrm{e}^{-3x}$. Or, le déterminant du trinôme $X^2 + (2-4\ln 2)X + 1$ est $(2-4\ln 2)^2 - 4 = 16\ln 2(\ln 2 - 1) < 0$ donc le trinôme est toujours du signe de $a = 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $d'(x) > 0$ donc d est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Or, $d(0) = 0$ donc, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $d(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $\dfrac{15}{4\ln 2}x + \dfrac{5}{2} \geqslant f(x)$. Ainsi, la droite (A$N$) est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $[0\,;+\infty[$ et donc le triangle ABN est inclus dans $\mathcal{D}$.

On conclut que le point N de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ln 2\,;5\right)$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que la droite $(\mathrm{A}N)$ sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

ANNEXE

Exercice 3



Exercice 4