Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 04 avril 2015

Exercice 1

Partie A. — Conjecture graphique

Graphiquement, on peut conjecturer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles, l'une comprise entre -1 et 0 et l'autre comprise entre 0 et 1.

Partie B. — Étude de la validité de la conjecture graphique

1. a. Pour tout réel x, $x^2+x^3 = x^2(x+1)$ donc x^2+x^3 a le même signe de $x+1$. Ainsi, $x^2+x^3 \leq 0$ si $x \in]-\infty\,;-1]$ et $x^2+x^3 \geq 0$ si $x \in [-1\,;+\infty[$.

b. Par théorème, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Or, on a vu que, pour tout $x \in]-\infty\,;-1]$, $x^2+x^3 \leq 0$ donc $3(x^2+x^3) \leq 0$ et donc $\mathrm{e}^x \neq 3(x^2+x^3)$. Ainsi, (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

c. D'une part, $\mathrm{e}^0 = 1$ et, d'autre part, $3(0^2+0^3) = 0 \neq \mathrm{e}^0$ donc 0 n'est pas solution de (E).

2. Pour tout $x \in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, $x^2+x^3 > 0$ donc

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^x) = \ln(3(x^2+x^3)) \Leftrightarrow x = \ln(3) + \ln(x^2(x+1)) \\ &\Leftrightarrow x = \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x+1) - x = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. a. La fonction h est dérivable sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$,

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{1-(x+1)}{x+1} = \frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{2(x+1)-x^2}{x(x+1)}$$

i.e. $\boxed{h'(x) = \dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}}$.

b. Étudions le signe du trinôme $P(x) = -x^2+2x+2$ sur $\mathbb{R}$. Le discriminant de $P(x)$ est $2^2 - 4\times(-1)\times 2 = 12$ donc $P(x)$ admet deux racines réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1+\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$. Comme $a = -1 < 0$, on en déduit que $P(x) \leq 0$ si $x \in \left]-\infty\,;1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$ et que $P(x) \geq 0$ si $x \in \left[1-\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\right]$.

Étant donné que $x_1 > 0$ et que $x_2 \in]-1\,;0[$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Ainsi, h est strictement croissante sur $\left]-1\,;1-\sqrt{3}\right]$, strictement décroissante sur $\left[1-\sqrt{3}\,;0\right[$, strictement croissante sur $\left]0\,;1+\sqrt{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

c. Sur l'intervalle $]-1\,;0[$, le maximum de h est $h(1-\sqrt{3}) \approx -0{,}1$ donc, pour tout $x \in\,]-1\,;0[$, $h(x) < 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur l'intervalle $]-1\,;0[$.
Sur l'intervalle $\left]0\,;1+\sqrt{3}\right]$, la fonction h est continue car dérivable et strictement croissante. De plus, d'après l'énoncé, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ et $h(1+\sqrt{3}) \approx 1{,}7 > 0$ donc, comme $0 \in \left]-\infty\,;h(1+\sqrt{3})\right]$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]0\,;1+\sqrt{3}\right]$.
Sur l'intervalle $\left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$, la fonction h est continue car dérivable et strictement décroissante. De plus, d'après l'énoncé, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$ et $h(1+\sqrt{3}) \approx 1{,}7 > 0$ donc on déduit de même que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $\left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.
Ainsi, on conclut finalement que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0{,}62$ et $\beta \approx 7{,}12$.

d. On conclut que la conjecture de la partie A était fausse puisque, s'il y a bien 2 solutions pour l'équation $h(x) = 0$ (et donc pour (E)), la plus petite est comprise entre 0 et 1 et non entre -1 et 0 et la seconde n'avait pas été lue sur le graphique car elle n'apparaissait pas dans la fenêtre d'affichage.

Exercice 2

Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Sujet A	**a**	**c**	**b**	**b**	**a**
Sujet B	**A**	**E**	**G**	**J**	**N**

Explications

1. Notons I et J les milieux respectifs de [AD] et [BC]. Alors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IG}} &= \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{AJ}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \frac{1}{4}\times\left(-2\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + \frac{1}{4}\underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}}\right)}_{=\vec{0}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AJ}}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{IJ}}
\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont colinéaires donc les points I, J et G sont alignés.

2. Etant donné que $\mathrm{AB}^2 = 2^2+4^2+6^2 = 56$, $\mathrm{AC}^2 = (-4)^2+6^2+2^2 = 56$ et $\mathrm{BC}^2 = (-6)^2+2^2+(-4)^2 = 56$, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} = \sqrt{56}$ donc ABC est équilatéral.

3. Notons Δ la droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C. Alors, tout vecteur directeur de Δ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;4\,;6)$. Ceci élimine la réponse **c** puisque dans cette représentation un vecteur directeur a pour coordonnées $(1\,;-1\,;2)$. Les deux autres sont en revanche possibles puisque les vecteurs de coordonnées $(2\,;4\,;6)$ et $(1\,;2\,;3)$ sont colinéaires à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. De plus, $\mathrm{C} \in \Delta$ et on vérifie que, pour la représentation **b**, C est le point de paramètre $t = 1$ donc c'est cette représentation qui correspond à Δ.

4. Les droites (d) et (d') sont dirigées respectivement par $\vec{u}\,(1\,;2\,;-5)$ et $\vec{v}\,(-1\,;-2\,;-4)$. Puisque $x_{\vec{u}}z_{\vec{v}} = -4 \neq 5 = x_{\vec{v}}z_{\vec{u}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Étudions $(d) \cap (d')$. Pour cela, on résout le système :

$$(S) : \begin{cases} 5+t = 6-k \\ 2t = 2-2k \\ 1-5t = -4+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1-k \\ 2(1-k) = 2-2k \\ 1-5(1-k) = -4+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5-k \\ 2-2k = 2-2k \\ -4+5k = -4+4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1-k \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (S) admet une unique solution donc (d) et (d') sont sécantes (au point $I\,(6\,;2\,;-4)$).

5. Une représentation paramétrique de (P) est $\begin{cases} x = 2+3k+k' \\ y = 1+2k \\ z = 3k+4k' \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$. Pour étudier les positions relatives de (d) et (P), résolvons le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 5+t = 2+3k+k' \\ 2t = 1+2k \\ 1-5t = 3k+4k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3+3k+k' \\ 2(-3+3k+k') = 1+2k \\ 1-5(-3+3k+k') = 3k+4k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3+3k+k' \\ 4k+2k'-7 = 0 \\ 18k+9k'-16 = 0 \end{cases}$$

$$(T) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3+3k+k' \\ k' = -2k+\frac{7}{2} \\ 18k+9\left(-2k+\frac{7}{2}\right)-16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3+3k+k' \\ k' = -2k+\frac{7}{2} \\ \frac{31}{2} = 0 \end{cases}$$

La dernière égalité est absurde donc (T) n'a pas de solution. On en déduit que (d) est strictement parallèle à (P).

Exercice 3 (enseignement obligatoire)

1. Le discriminant du trinôme $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4$ est $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 < 0$. Ainsi, l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \frac{2\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $\overline{z_1} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. <u>L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) est $\{\sqrt{3}-\mathrm{i}, \sqrt{3}+\mathrm{i}\}$</u>.

2. a. $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ donc, d'après la question 1, ce nombre est bien une solution de (E).

b. D'une part, $z_2 = 2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ i.e. $\boxed{z_2 = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}$ et, d'autre part, $z_3 = 2^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4z_1$ i.e. $\boxed{z_3 = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $z_n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left[\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Or,
<u>si n est pair</u> alors $\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
<u>si n est impair</u> alors $\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, dans tous les cas, $\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(-1)^n}{2}$.
On conclut donc que $\boxed{z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\mathrm{i}\right)}$.

3. $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} - (\sqrt{3} - \mathrm{i})\right| = \left|\sqrt{3} + 3\mathrm{i}\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12}$ i.e. $\boxed{M_1M_2 = 2\sqrt{3}}$ et $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} - (2\sqrt{3} + 2\mathrm{i})\right| = \left|2\sqrt{3} - 6\mathrm{i}\right| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{48}$ i.e. $\boxed{M_2M_3 = 4\sqrt{3}}$.

4. a.

Entrée :	A un réel
Initialisation :	L prend la valeur $2\sqrt{3}$
	N prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $\boxed{L < A}$
	Affecter à L la valeur $L + 2^{N+1}\sqrt{3}$
	N prend la valeur $\boxed{N+1}$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher $\boxed{N}$

b. D'après l'énoncé, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$ donc la suite (M_nM_{n+1}) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $M_1M_2 = 2\sqrt{3}$. On en déduit, par théorème, que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\frac{1-2^n}{1-2} = 2\sqrt{3}\frac{1-2^n}{-1}$ i.e. $\boxed{\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)}$.

c. Il s'ensuit, puisque $2\sqrt{3} > 0$, que

$$\ell_n \geq 10^{50} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,(2^n - 1) \geq 10^{50} \Leftrightarrow 2^n - 1 \geq \frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} + 1$$

et, puisque $\frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} + 1 > 0$ et $\ln(2) > 0$,

$$\ell_n \geq 10^{50} \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} + 1\right) \Leftrightarrow n\ln(2) \geq \ln\left(\frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} + 1\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{50}}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln(2)}.$$

Or, $\frac{\ln\left(\frac{10^{50}}{2\sqrt{3}}+1\right)}{\ln(2)} \approx 164{,}3$ donc le premier entier tel que $\ell_n \geq 10^{50}$ est $n = 165$. Ainsi, si on entre $A = 10^{50}$, l'algorithme affiche en sortie $\boxed{N = 165}$.

Exercice 3 (enseignement de spécialité)

1.

B	A	D	$D > 0$
14	12	2	VRAIE
12	2	10	VRAIE
2	10	8	VRAIE
10	8	2	VRAIE
8	2	6	VRAIE
2	6	4	VRAIE
6	4	2	VRAIE
4	2	2	VRAIE
2	2	0	FAUSSE

$\boxed{\text{La valeur affichée en sortie est 2}}$.

2. a. D'après l'énoncé, 221 et 331 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $221u + 331v = 1$. En posant, $x = u$ et $y = -v$, on obtient deux entiers x et y tels que $221x - 331y = 1$. L'équation (E) admet donc bien des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b. Puisque $221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$, le couple $(3\,;2)$ est bien une solution particulière de (E).

Soit $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E). Alors, $221x - 331y = 1 = 221 \times 3 - 331 \times 2$ donc $221(x-3) = 331(y-2)$. Ainsi, 331 divise $221(x-3)$ et, comme 331 et 221 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 331 divise $x - 3$. Ainsi, il existe un entier k tel que $x - 3 = 331k$ i.e. $x = 3 + 331k$. Dès lors, $221 \times 331k = 331(y-2)$ donc $221k = y - 2$ i.e. $y = 2 + 221k$. Ainsi, le couple $(x\,;y)$ est de la forme $(3 + 331k\,;2 + 221k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$,

$$221(3+331k) - 331(2+221k) = 663 + 221 \times 331k - 662 - 331 \times 221k = 1$$

donc $(3+331k\,;2+221k)$ est solution de (E).

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de (E) est } \{(3+331k\,;2+221k)\,|k \in \mathbb{Z}\}}$.

3. **a.** Par définition, (v_n) est une suite arithmétique de raison 331 et de premier terme $v_0 = 3$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 + 331n}$.

   b. Un couple d'entiers $(p\,;q)$ vérifie $u_p = v_q$ si et seulement si $2 + 221p = 3 + 331q$ c'est-à-dire $221p - 331q = 1$. Ainsi, $u_p = v_q$ si et seulement si $(p\,;q)$ est solution de (E). On déduit de la question 2 que $u_p = v_q$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $p = 3 + 331k$ et $q = 2 + 221k$. Dès lors, les conditions $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$ impose que $k = 0$ ou $k = 1$. On en déduit que les couples $(p\,;q)$ tels que $u_p = v_q$ avec $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$ sont $(3\,;2)$ et $(334\,;223)$.

EXERCICE 4

Partie A

1. Graphiquement, on lit $\boxed{f(1) = 2}$ et $\boxed{f'(1) = 0}$ (puisque la tangente en B est horizontale).
2. La fonction f est dérivable par quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel strictement positif x,
$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}$$
3. Etant donné que $f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = a$, on déduit de la question 1 que $a = 2$. Dès lors, comme $f'(1) = 0$, $b - 2 - 2\ln(1) = 0$ i.e. $b - 2 = 0$ soit $b = 2$. Ainsi, $\boxed{a = b = 2}$.

Partie B

1. D'après la partie A, pour tout réel $x \in \,]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2 - 2 - 2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$ donc, sachant que $2 > 0$ et $x^2 > 0$, $\boxed{g'(x) \text{ a bien le même signe que } -\ln x}$.
2. Par théorème, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} 2 + 2\ln x = -\infty$. Par quotient, puisque $x > 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty}$.

   Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et, par théorème, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$.
3. Étant donné que $\ln(x) \geq 0$ si $x \geq 1$ et $\ln(x) \leq 0$ si $x \leq 1$, on déduit des questions précédentes le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variation de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{0{,}46 \leq \alpha \leq 0{,}47}$.

5. Par définition, $g(\alpha) = 1$ donc $\frac{2+2\ln(\alpha)}{\alpha} = 1$. Ainsi, $2 + 2\ln(\alpha) = \alpha$ donc $\boxed{2\ln(\alpha) = \alpha - 2}$. Étant donné que $0{,}46 \leq \alpha \leq 0{,}47$, on en déduit que $0{,}46 - 2 \leq \alpha - 2 \leq 0{,}47 - 2$ et ainsi on aboutit à $\boxed{-1{,}54 \leq 2\ln(\alpha) \leq -1{,}53}$.

6. On a vu que $\alpha \geq 0{,}46$ et $\beta \geq 5{,}35$ donc, puisque tous les nombres considérés sont positifs, $\alpha\beta \geq 0{,}46 \times 5{,}35 = 2{,}461$. Par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, il s'ensuit que $(\alpha\beta)^2 \geq (2{,}461)^2 \approx 6{,}056$ donc $\boxed{(\alpha\beta)^2 \geq 6{,}05}$.

Par ailleurs, $-1{,}53 \geq 2\ln(\alpha) \geq -1{,}54$ donc $1{,}53 \leq -2\ln(\alpha) \leq 1{,}54$ et $2\ln(\beta) \leq 3{,}36$ donc, puisque tous les nombres considérés sont positifs, $-2\ln(\alpha) \times 2\ln(\beta) \leq 1{,}54 \times 3{,}36 = 5{,}1744$. Ainsi, $-4\ln(\alpha)\ln(\beta) \leq 5{,}18$ donc $\boxed{4\ln(\alpha)\ln(\beta) \geq -5{,}18}$.

7. Notons T_α et T_β les tangentes à la courbe de g respectivement aux points d'abscisses α et β. Alors, l'équation réduite de T_α est $y = g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha)$ i.e. $y = g'(\alpha)x - \alpha g'(\alpha) + g(\alpha)$. Il s'ensuit qu'un vecteur directeur de T_α est $\vec{u}(1, g'(\alpha))$.
On montre de même qu'un vecteur directeur de T_β est $\vec{v}(1, g'(\beta))$.
Dès lors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 1 + g'(\alpha)g'(\beta) = 1 + \frac{-2\ln(\alpha)}{\alpha^2} \times \frac{-2\ln(\beta)}{\beta^2} = 1 + \frac{4\ln(\alpha)\ln(\beta)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha\beta)^2 + 4\ln(\alpha)\ln(\beta)}{(\alpha\beta)^2}.$$

Or, d'après la question précédente, $(\alpha\beta)^2 \geq 6{,}05$ et $4\ln(\alpha)\ln(\beta) \geq -5{,}18$ donc

$$(\alpha\beta)^2 + 4\ln(\alpha)\ln(\beta) \geq 6{,}05 + (-5{,}18) = 0{,}87.$$

En particulier, $(\alpha\beta)^2 + 4\ln(\alpha)\ln(\beta) \neq 0$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$.
Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux et donc $\boxed{T_\alpha \text{ et } T_\beta \text{ ne sont pas perpendiculaires}}$.