Corrigé du surveillé de mathématiques du 04/10/14

Exercice 1

1. **a.** $P(4) = 4^3 - 8 \times 4^2 + 21 \times 4 - 20 = 64 - 128 + 84 - 20$ soit $\boxed{P(4) = 0}$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $(z-4)(z^2-4z+5) = z^3-4z^2+5z-4z^2+16z-20 = z^3-8z^2+21z-20 = P(z)$. Ainsi, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-4)(z^2-4z+5)}$.

c. En utilisant la question précédente :

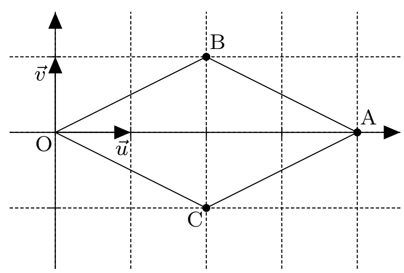
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2-4z+5) = 0 \Leftrightarrow z-4 = 0 \text{ ou } z^2-4z+5 = 0.$$

Or, d'une part, $z - 4 = 0$ si et seulement si $z = 4$. D'autre part, le discriminant de $z^2 - 4z + 5$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$ donc l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{-(-4) - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 2 + \mathrm{i}.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{C} \text{ de } P(z) = 0 \text{ est } \{4\ ;\ 2-\mathrm{i}\ ;\ 2+\mathrm{i}\}}$.

2. **a.**



b. Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$:

$$z_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}} = z_{\mathrm{B}} = 2 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{\mathrm{CA}}} = z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}} = 4 - (2 - \mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}.$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{\mathrm{OB}}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ ce qui démontre que $\boxed{\text{OBAC est un parallélogramme}}$.

Exercice 2

1. Etant donné que $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}} = \dfrac{(1-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})}{5^2+3^2} = \dfrac{5+3\mathrm{i}-15\mathrm{i}+9}{34} = \dfrac{14-12\mathrm{i}}{34} = \dfrac{7}{17} - \dfrac{6}{17}\mathrm{i}$, la partie réel de $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}}$ est $\dfrac{7}{17}$. L'affirmation est donc FAUSSE.

2. L'affirmation est FAUSSE. Par exemple, pour $z = -1$, $Z = \dfrac{1+(-1)}{1-3\mathrm{i}} = 0$ donc $\bar{Z} = 0$ mais $\dfrac{1-(\overline{-1})}{1-3\mathrm{i}} = \dfrac{2}{1-3\mathrm{i}} \neq 0$.
En fait, d'après les propriétés de la conjugaison, pour tout complexe z, le conjugué de

$$\overline{\left(\frac{1+z}{1-3\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{1+z}}{\overline{1-3\mathrm{i}}} = \frac{1+\bar{z}}{1+3\mathrm{i}}.$$

3. Pour tout complexe z,

$$(1+\mathrm{i})\overline{z}+3-\mathrm{i} = \overline{z} \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})\overline{z}-\overline{z} = -3+\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{i}\overline{z} = -3+\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z}\frac{(-3+\mathrm{i})-\mathrm{i}}{1} \Leftrightarrow \overline{z} = 1+3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1-3\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(1+\mathrm{i})\overline{z} + 3 - \mathrm{i} = \overline{z}$ dans $\mathbb{C}$ est $\{1 - 3\mathrm{i}\}$. L'affirmation est donc FAUSSE.

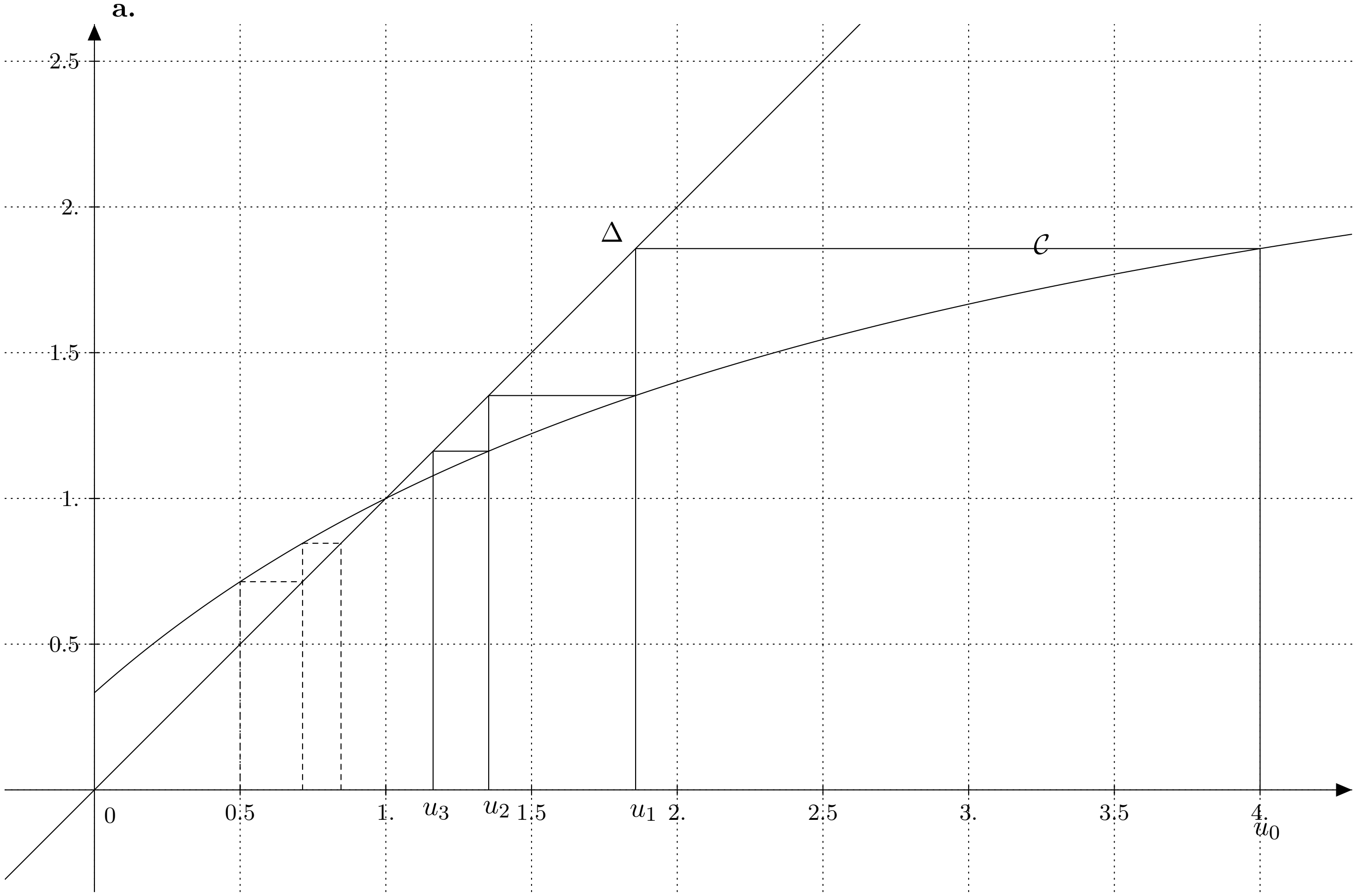
4. Le discriminant de z^2-4z+6 est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times6=-8<0$ donc l'équation $z^2-4z+6=0$ admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et $z_2=\overline{z_1}$. Notons M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Si on écrit $z_1=a+\mathrm{i}b$ sous forme algébrique alors les coordonnées de M_1 sont $(a\,;b)$ et celles de M_2 sont $(a\,;-b)$ puisque $z_2=\overline{z_1}$. Ainsi, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'affirmation est VRAIE.

5. Etant donné que $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}^4=\left(\mathrm{i}^2\right)^2=(-1)^2=1$ donc $\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}^{4n}\times\mathrm{i}=\left[\mathrm{i}^4\right]^n\times\mathrm{i}=1^n\times\mathrm{i}=\mathrm{i}$. Ainsi, l'affirmation est VRAIE.

Exercice 3

1. Considérations graphiques

a.



b. A l'aide du graphique, on peut conjecturer que (u_n) est décroissante.

c. Si, comme on l'a représenté sur le graphique en pointillés, on prend $u_0=0{,}5$ alors il semble que la suite ne soit plus décroissante mais croissante. Le résultat n'est donc pas le même quelle que soit la valeur de u_0. Plus précisément, on peut penser que (u_n) est croissante si $u_0\in[0\,;1]$ et décroissante si $u_0\in[1\,;+\infty[$.

2. Un algorithme

L'algorithme n°1 n'affiche qu'une seule valeur de u, la valeur finale, qui correspond à u_n.

L'algorithme n°2 affecte à u la valeur 4 juste avant l'affichage donc cet algorithme affiche n fois le nombre 4.

Ainsi, seul l'algorithme n°3 peut convenir.

3. Etude du sens de variation de (u_n)

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \frac{1+3u_n-(3+u_n)}{3+u_n} = \frac{-2+2u_n}{3+u_n}$$

et donc, en factorisant par 2 au numérateur, $\boxed{u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{3+u_n}}$.

b. Soit la proposition P_n : « $u_n \geq 1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $u_0 = 4 \geq 1$, P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $u_k \geq 1$ donc $u_k - 1 \geq 0$. Dès lors, $2(u_k - 1) \geq 0$. Par ailleurs, $3 + u_k \geq 4 > 0$ donc, par quotient, $\frac{2(u_k-1)}{3+u_k} \geq 0$. On déduit alors de la question a. que $u_{k+1} - 1 \geq 0$ i.e. $u_{k+1} \geq 1$.
Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-u_n(3+u_n)}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n}.$$

Or, $u_n \geq 1$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $u_n^2 \geq 1^2 = 1$ et ainsi $1 - u_n^2 \leq 0$. Etant donné que, comme on l'a déjà dit, $3 + u_n > 0$, il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. Expression de u_n en fonction de n

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1}{\frac{1+3u_n}{3+u_n} + 1} = \frac{\left[\frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1\right] \times (3+u_n)}{\left[\frac{1+3u_n}{3+u_n} + 1\right] \times (3+u_n)}$$

$$= \frac{1+3u_n-(3+u_n)}{1+3u_n+3+u_n} = \frac{-2+2u_n}{4+4u_n} = \frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

i.e. $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

b. Sachant que $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{4-1}{4+1}$, $v_0 = \frac{3}{5}$. On déduit alors de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit encore, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{3}{5 \times 2^n}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1$ donc $5 \times 2^n \geq 5$ et ainsi $v_n = \frac{3}{5 \times 2^n} \leq \frac{3}{5}$. En particulier, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 1}$.

<u>Autre méthode</u>. — Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1$. Alors, $\frac{u_n-1}{u_n+1} = 1$ i.e. $u_n - 1 = u_n + 1$ et donc $-1 = 1$ ce qui est absurde. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ donc $v_n(u_n+1) = u_n - 1$. Ainsi, $v_n u_n + v_n = u_n - 1$ donc $v_n u_n - u_n = -v_n - 1$ soit encore $u_n(v_n - 1) = -v_n - 1$. Etant donné que $v_n \neq 1$ d'après la question précédente, on en déduit que $u_n = \frac{-v_n-1}{v_n-1}$ ce qui peut encore s'écrire $\boxed{u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}}$.

e. On déduit des questions b. et d. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + \frac{3}{5\times 2^n}}{1 - \frac{3}{5\times 2^n}}$ i.e. en multipliant numérateur et dénominateur par 5×2^n, $\boxed{u_n = \dfrac{5 \times 2^n + 3}{5 \times 2^n - 3}}$.