Devoir surveillé de mathématiques

Durée : 2 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 8z^2 + 21z - 20$.

1. **a.** Calculer $P(4)$.

b. Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-4)(z^2 - 4z + 5)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 4$, $z_{\mathrm{B}} = 2 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 2 - \mathrm{i}$.

a. Faire une figure et placer les points A, B et C.

b. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un parallélogramme.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier la réponse avec précision. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. La partie réelle de $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}}$ est $\dfrac{1}{5}$.

2. Pour tout nombre complexe z, le conjugué de $\dfrac{1+z}{1-3\mathrm{i}}$ est $\dfrac{1-\bar{z}}{1+3\mathrm{i}}$.

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(1+\mathrm{i})\bar{z} + 3 - \mathrm{i} = \bar{z}$ est $\{1 + 3\mathrm{i}\}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}$.

Exercice 3 (11 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. **Considérations graphiques**

   On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

   $$f(x) = \frac{1+3x}{3+x}.$$

   On note Δ la droite d'équation $y = x$ et $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées sur la figure donnée en annexe (page 3).

   a. Sur cette figure, placer u_0 sur l'axe des abscisses et construire u_1, u_2 et u_3 sur ce même axe. (On laissera apparents tous les traits de construction.)

   b. Conjecturer le sens de variation de (u_n).

   c. Le sens de variation de (u_n) resterait-il le même si on prenait pour u_0 une autre valeur dans $[0\,;+\infty[$ que 4 ? (On attend une justification s'appuyant sur des considérations graphiques.)

2. **Un algorithme**

   On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes donnés en annexe (page 3), un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

3. **Etude du sens de variation de (u_n)**

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{3+u_n}$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

   c. En calculant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$, en déduire le sens de variation de (u_n).

4. **Expression de u_n en fonction de n**

   On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   b. Calculer v_0 puis donner, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

   d. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n.

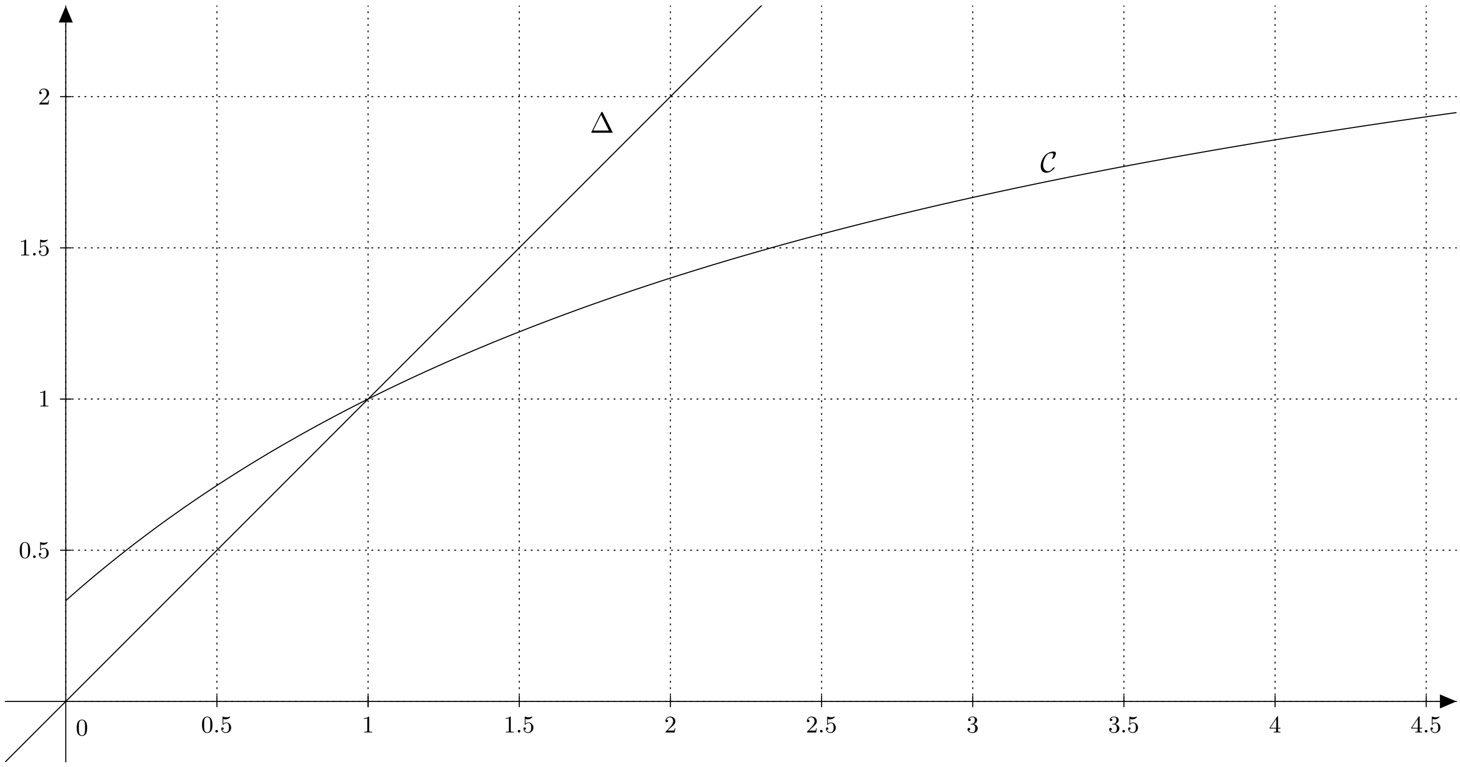
   e. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{5 \times 2^n + 3}{5 \times 2^n - 3}$.

Nom : .... Prénom : ....

Annexe

A rendre avec la copie

1. Considérations graphiques



2. Un algorithme

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**
Variables : u est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n u prend la valeur 4 Pour i variant de 1 à n faire u prend la valeur $\dfrac{1+3u}{3+u}$ Fin pour Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** u est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire u prend la valeur 4 Afficher u u prend la valeur $\dfrac{1+3u}{3+u}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** u est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n u prend la valeur 4 Pour i variant de 1 à n faire Afficher u u prend la valeur $\dfrac{1+3u}{3+u}$ Fin pour Afficher u **Fin algorithme**