Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

EXERCICE 1 (4 points) [Sujet A]

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour chaque question, on demande d'entourer sur le tableau de l'annexe (page 5) la lettre correspondant à la réponse exacte.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x+\mathrm{i}y$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+\mathrm{i})^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **b.** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **c.** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **d.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ tels que $|z-1+\mathrm{i}|=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ **b.** $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ **c.** $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ **d.** $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0=1+\mathrm{i}$ et $Z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

- **a.** Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- **b.** Pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ est équilatéral.
- **c.** La suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.
- **d.** Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}}=-1-\mathrm{i}\quad;\quad Z_{\mathrm{B}}=2-2\mathrm{i}\quad\text{et}\quad Z_{\mathrm{C}}=1+5\mathrm{i}.$$

On pose $Z=\dfrac{Z_{\mathrm{C}}-Z_{\mathrm{A}}}{Z_{\mathrm{B}}-Z_{\mathrm{A}}}$.

- **a.** Z est un nombre réel.
- **b.** Le triangle ABC est isocèle en A.
- **c.** Le triangle ABC est rectangle en A.
- **d.** Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Exercice 2 (6 points)

Partie A. — Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe (page 5), on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
Quelle interprétation graphique peut-on donner de la limite en 1 ?

2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

3. En déduire que, pour tout réel $x \geq \mathrm{e}$, $f(x) \geq \mathrm{e}$.

Partie B. — Etude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ c'est-à-dire $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

1. Sur l'annexe (page 5), en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 de coordonnées respectives $(u_0\,;0)$, $(u_1\,;0)$ et $(u_2\,;0)$. On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq \mathrm{e}$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 7 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,719
    Affecter (X/ ln X) à X
    Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

a. Justifier que l'algorithme se termine.

b. A l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	3,597288397	2,809985662	2,719746168	2,718282223	2,718281829

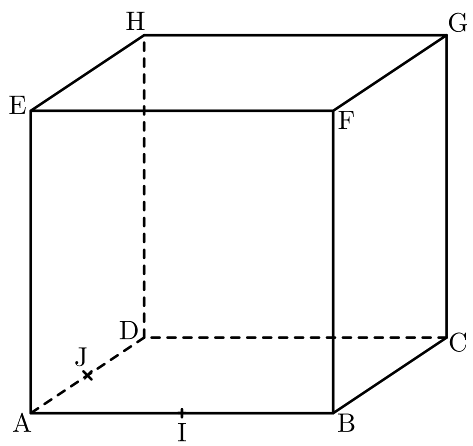
EXERCICE 3 (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].

1. **a.** Démontrer que les droites (IJ) et (FH) sont parallèles et que $\text{IJ} = \frac{1}{2}\text{FH}$.
   b. En déduire que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes en un point K.
   c. Déterminer l'intersection des plans (ABF) et (ADH) et en déduire que K appartient à la droite (AE).

   Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$. Ainsi, les coordonnées des sommets du cube sont $\text{A}(0\,;0\,;0)$, $\text{B}(1\,;0\,;0)$, $\text{C}(1\,;1\,;0)$, $\text{D}(0\,;1\,;0)$, $\text{E}(0\,;0\,;1)$, $\text{F}(1\,;0\,;1)$, $\text{G}(1\,;1\,;1)$ et $\text{H}(0\,;1\,;1)$.

2. **a.** Calculer les coordonnées des points I et J.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FI) et une représentation paramétrique de la droite (HJ).
   c. En déduire que les coordonnées de K sont $(0\,;0\,;-1)$.
   d. Justifier que A est le milieu de [EK].
3. On considère le milieu P de [FH] et le point L tel que $\overrightarrow{\text{LA}} + \overrightarrow{\text{LF}} + \overrightarrow{\text{LH}} = \overrightarrow{0}$.
   a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{\text{LF}} + \overrightarrow{\text{LH}} = 2\overrightarrow{\text{LP}}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AP}}$.
   c. Calculer les coordonnées du point P et en déduire que les coordonnées de L sont $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.
   d. Démontrer que le triangle ALC est rectangle en L.
4. **a.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{KC}}$, $\overrightarrow{\text{KG}}$ et $\overrightarrow{\text{KL}}$ sont coplanaires.
   b. Que peut-on en déduire concernant les points C, G, K et L ?



Exercice 4 (5 points)

Une entreprise emploie 300 personnes dans des bureaux qui sont répartis sur 3 étages : 1^{er} étage, $2^{\text{ième}}$ étage et $3^{\text{ième}}$ étage. Voici les résultats d'une enquête réalisée dans cette entreprise, à propos de l'utilisation des ascenseurs pour se rendre au bureau :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1^{er} étage, 75 vont au $2^{\text{ième}}$ étage et 100 vont au $3^{\text{ième}}$ étage.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au $2^{\text{ième}}$ étage, les autres vont au 1^{er} étage.

On choisit au hasard une personne de cette entreprise et on définit les événements suivants :

E_1 : « La personne va au 1^{er} étage. »
E_2 : « La personne va au $2^{\text{ième}}$ étage. »
E_3 : « La personne va au $3^{\text{ième}}$ étage. »
A : « La personne emprunte l'ascenseur. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne aille au $2^{\text{ième}}$ étage par l'ascenseur.

b. Montrer que la probabilité que la personne aille au $2^{\text{ième}}$ étage est égale à $\dfrac{1}{3}$.

c. Montrer que les événements E_1, E_2 et E_3 sont équiprobables.

d. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'ascenseur sachant qu'elle va au 2^{e} étage.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette entreprise. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au $2^{\text{ième}}$ étage.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au $2^{\text{ième}}$ étage.

c. En moyenne, sur les 20 personnes, combien vont au $2^{\text{ième}}$ étage ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette entreprise. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. On considère l'événement B_n : « au moins une des n personnes va au $2^{\text{ième}}$ étage »

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de B_n soit supérieure ou égale à 0,999999.

NOM : .... **Prénom :** ....

ANNEXE
A détacher et à rendre avec sa copie

Exercice 1. — Réponses au Q.C.M. [Sujet A]

Questions	Réponses			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d

Exercice 2