Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 07/01/17

Exercice 1

1. a. Remarquons que (E) a un sens si et seulement si $z \neq 0$. De plus, pour tout complexe $z \neq 0$,

$$(\text{E}) \Leftrightarrow z^2 = z - 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-1) - \text{i}\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme aucun de ces nombres n'est nul, on conclut que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est $\boxed{\left\{\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

b. Si a est solution de (E) alors $z_1 = 1 - \dfrac{1}{a} = a = z_0$ et donc, de même, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{a} = a = z_0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0$ donc $\boxed{(z_n) \text{ est constante}}$.

2. a. Si $a = \text{i}$ alors

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{\text{i}} = 1 + \text{i}$

$z_2 = 1 - \dfrac{1}{1+\text{i}} = 1 - \dfrac{1-\text{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}} = 1 - \dfrac{2}{1+\text{i}} = 1 - \dfrac{2(1-\text{i})}{2} = \text{i}$

Comme $z_3 = z_0$, on en déduit que $z_4 = z_1$, $z_5 = z_2$ et $z_6 = z_3$.

b. À partir des résultats donnés par l'énoncé, on peut conjecturer que la suite (z_n) est périodique de période 3 c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+3} = z_n$.

c. Par définition,

$$z_{n+2} = 1 - \frac{1}{z_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_n}} = 1 - \frac{1}{\frac{z_n - 1}{z_n}} = 1 - \frac{z_n}{z_n - 1} = \frac{z_n - 1 - z_n}{z_n - 1} = \frac{-1}{z_n - 1} = \frac{1}{1 - z_n}.$$

Par suite, $z_{n+3} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{1-z_n}} = 1 - (1 - z_n)$ donc $\boxed{z_{n+3} = z_n}$.

d. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, (z_n) est bien périodique de période 3 donc la suite (z_{3n}) est constante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{3(n+1)} = z_{3n+3} = z_{3n}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_{3\times 0} = z_0 = 1 + \text{i}$. Or, $2016 = 3 \times 672$ donc $\boxed{z_{2016} = 1 + \text{i}}$.

Exercice 2

Partie A. — Étude d'une fonction auxiliaire

1. Comme g est une fonction polynôme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

2. Comme g est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$. Ainsi, $g'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 1 et -1 et dont le coefficient dominant est $3 > 0$. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$ et $g'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-1\,;1]$.
Comme g' ne s'annule qu'en 1 et -1, on conclut que g est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-1\right]$, strictement décroissante sur $[-1\,;1]$ et strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

3. On aboutit donc au tableau suivant.

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$ ↗	-2 ↘	-6 ↗	0 ↗	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;1\right]$, le maximum de g est -2 donc, pour tout $x \in \left]-\infty\,;1\right]$, $g(x) \leqslant -2$ et en particulier $g(x) \neq 0$. Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left]-\infty\,;1\right]$.
Sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, la fonction g est continue car dérivable et strictement croissante. De plus, $g(1) = -6$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ donc $0 \in \left[g(1)\,;\lim\limits_{+\infty} g\right[$. On déduit alors du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.
Finalement, on conclut que $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de } g(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}}$.
Comme g est croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$, $g(x) \leqslant 0$ si $x \in [1\,;\alpha]$ et $g(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[\alpha\,;+\infty\right[$. Comme, par ailleurs, $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant 1$, on conclut que $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\alpha\right]$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[\alpha\,;+\infty\right[$.

5. Á l'aide de la calculatrice, on trouve que $\boxed{\alpha \approx 2{,}196}$.

Partie B. — Étude de la fonction f

1. Comme f est une fonction rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x$ donc $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = -\infty}$.

2. D'une part, $\lim\limits_{x\to1} x^3 + 2x^2 = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to1} x^2 - 1 = 0$ et, on a vu dans la question 2 de la partie A que si $x \geqslant 1$ alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et si $x \in [-1\,;1]$ alors $x^2 - 1 \leqslant 0$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty}$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(x^3+2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-(2x^4+4x^3)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$$

c'est-à-dire $\boxed{f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}}$. Comme $(x^2-1)^2 > 0$ pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$ pour tout $x \in D$. On peut alors dresser le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

4. On aboutit finalement au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C. — Écart entre deux courbes

1. Pour tout $x \in D$,

$$e(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - (x+2) = \frac{x^3+2x^2-(x^2-1)(x+2)}{x^2-1} = \frac{x^3+2x^2-(x^3+2x^2-x-2)}{x^2-1}$$

soit $e(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. Ainsi, la fonction $e : x \mapsto e(x)$ est une fonction rationnelle donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = 0}$.
On en déduit que l'écart entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d tend vers 0 i.e. que ces deux courbes devient infiniment proche au voisinage de $+\infty$. (On dit que d est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.)

2. Pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 > 0$ donc

$$e(x) \leqslant 10^{-1} \Leftrightarrow 10\frac{x+2}{x^2-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 10x + 20 \leqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 21 \geqslant 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 10x - 21$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 184 > 0$ donc ce trinôme admet 2 racines réelles :

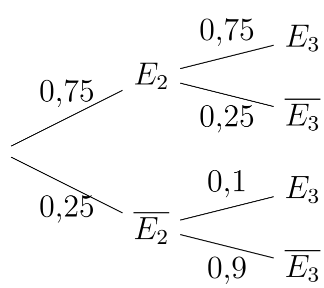
$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{184}}{2 \times 1} \approx -1{,}8 \qquad x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{184}}{2 \times 1} \approx 11{,}8.$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que, pour tout réel x, $x^2 - 10x - 21 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \,]-\infty\,; x_1] \cup [x_2\,; +\infty[$. Ainsi, le plus petit entier n tel que $e(n) \leqslant 10^{-1}$ est $\boxed{n = 12}$.

Exercice 3 – obligatoire

1. a. On sait que le technicien vient la première semaine donc $p_1 = 1$.

b. Étant donné que E_1 est un évènement certain, $p_2 = P(E_2) = P_{E_1}(E_2) = 0{,}75$. On a donc l'arbre suivant :



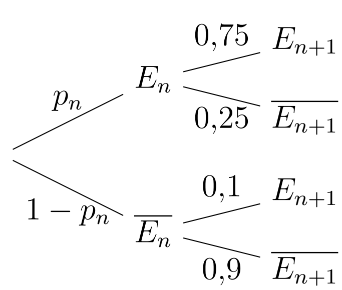
donc $p_3 = P(E_3) = 0{,}75 \times 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}1$ soit $\boxed{p_3 = 0{,}5875}$.

c. On cherche $P_{E_3}(E_2)$. Or,

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}75}{0{,}5875}$$

donc $\boxed{P_{E_3}(E_2) = \dfrac{45}{47}}$.

2. a.



b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'arbre,

$$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = 0{,}75p_n + 0{,}1(1 - p_n) = 0{,}75p_n + 0{,}1 - 0{,}1p_n$$

donc $\boxed{p_{n+1} = 0{,}65p_n + 0{,}1}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{7} = 0{,}65 p_n + 0{,}1 - \frac{2}{7} = \frac{13}{20} p_n - \frac{13}{70} = \frac{13}{20}\left(p_n - \frac{13}{70} \times \frac{20}{13}\right) = \frac{13}{20}\left(p_n - \frac{2}{7}\right)$$

donc $u_{n+1} = \dfrac{13}{20} u_n$. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{13}{20}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$.

d. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{5}{7}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{n-1}}$ et, comme $p_n = u_n + \dfrac{2}{7}$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{5}{7}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{7}}$.

e. Comme $-1 < \dfrac{13}{20} < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} = 0$ donc, par produit et somme, $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{7}}$.

3. Le nombre J affiché en sortie est le plus petit entier n tel que $p_n < \dfrac{2}{7} + 10^{-\mathrm{K}}$ i.e., puisque la suite est décroissante, le premier rang n à partir duquel l'écart entre p_n et sa limite est strictement inférieur à $10^{-\mathrm{K}}$.

Exercice 3 – spécialité

1. Par définition, $u_1 = 5u_0 - 4v_0 = 5$ et $v_1 = 2u_0 - v_0 = 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_n - 4v_n \\ 2u_n - v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AX_n$$

en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

3. a. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{B + C = I_2,\ B^2 = B,\ C^2 = C \text{ et } BC = CB = O_2}$.

b. On a

$$B + 3C = \begin{pmatrix} -1 + 3 \times 2 & 2 + 3 \times (-2) \\ -1 + 3 \times 1 & 2 + 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et, ainsi, $B + 3C = A$.

4. a. Considérons la proposition Q_n : « $A^n = B + 3^n C$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $B + 3^0 C = B + C = I_2 = A^0$, Q_0 est vraie. Supposons que Q_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, d'après les résultats de la question 3,

$$A^{k+1} = A^k A = (B + 3^k C)(B + 3C) = B^2 + 3BC + 3^k CB + 3^{k+1} C^2 = B + 3^{k+1} C$$

donc Q_{k+1} est vraie et on a prouvé par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = B + 3^n C}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = (B + 3^n C) X_0 = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n \\ -1 + 3^n & 2 - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n \\ -1 + 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times 3^n - 1 \text{ et } v_n = 3^n - 1}$.

c. Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et ainsi, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

5. L'algorithme proposé est un algorithme de seuil. L'entier N affiché en sortie est le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant \text{M}$.

6. **a.** Comme $\det A = 3 \neq 0$, la matrice A est inversible. De plus, comme A et A^{-1} commutent, $A^n(A^{-1})^n = (AA^{-1})^n = I_2^n = I_2$ donc A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

b. Soit r_n et s_n deux réels. Alors,

$$A^n(r_nB+s_nC) = (B+3^nC)(r_nB+s_nC) = r_nB^2+s_nBC+3^nCB+3^ns_nC^2 = r_nB+3^ns_nB.$$

Or, on a vu que $B + C = I_2$ donc, pour que $A^n(r_nB + s_nC) = I_2$, il suffit que $r_n = 1$ et $3^ns_n = 1$ i.e. $r_n = 1$ et $s_n = \dfrac{1}{3^n}$. On conclut que $(A^n)^{-1} = B + \dfrac{1}{3^n}C$ donc il existe bien des réels r_n et t_n tels que $(A^n)^{-1} = r_nB + s_nC$.

Exercice 4

1. Réponse B) ou c)

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. Réponse C) ou f)

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2^n}{5^n} + \dfrac{3^n}{5^n} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$. Comme $-1 < \dfrac{2}{5} < \dfrac{3}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

3. Réponse D) ou k)

Soit $u : x \mapsto x^2 + a$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $g = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ donc

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

4. Réponse C) ou p)

Soit $v : x \mapsto x^2 + 1$. La fonction v est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -2\frac{v'(x)}{v(x)^3} = -2 \times \frac{2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}.$$

Ainsi, $h'(-1) = \dfrac{-4 \times (-1)}{((-1)^2+1)^3} = \dfrac{1}{2}$ et $h'(1) = \dfrac{-4 \times 1}{(1^2+1)^3} = -\dfrac{1}{2}$. Par ailleurs, $h(-1) = h(1) = \dfrac{1}{4}$ donc l'équation réduite de T_{-1} est $y = \dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ et l'équation réduite de T_1 est $y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

Comme T_{-1} et T_1 n'ont pas le même coefficient directeur, elles sont sécantes. De plus, on constate que $\dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{3}{4}$ donc T_{-1} et T_1 sont sécantes au point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$.