# Devoir surveillé de mathématiques

## Enseignement obligatoire (B)

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

### Exercice 1 (4 points)

Soit $a$ un nombre complexe différent de 0 et 1.

On considère la suite de nombres complexes $(z_n)$ définie par $z_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

**1. a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 1 - \dfrac{1}{z}$ d'inconnue $z$.

**b.** Que peut-on dire de la suite $(z_n)$ si $a$ est une solution de (E) ?

**2. a.** On suppose que $a = \mathrm{i}$. Calculer sous forme algébrique $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z_5$ et $z_6$.

**b.** On a calculé les 7 premiers termes de la suite $(z_n)$ pour différentes valeurs de $a$.

- Cas où $a = 2$

| $z_0$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,5 | $-1$ | 2 | 0,5 | $-1$ | 2 |

- Cas où $a = 1 + 2\mathrm{i}$

| $z_0$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 + 2\mathrm{i}$ | 0,8+0,4i | 0,5i | $1 + 2\mathrm{i}$ | 0,8+0,4i | 0,5i | $1 + 2\mathrm{i}$ |

- Cas où $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$

| $z_0$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{i}\sqrt{3}$ | $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\dfrac{1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | $\mathrm{i}\sqrt{3}$ | $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\dfrac{1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | $\mathrm{i}\sqrt{3}$ |

Quelle conjecture peut-on faire concernant la suite $(z_n)$ ?

**c.** Dans cette question, $a$ est à nouveau un complexe quelconque différent de 0 et 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $z_{n+2} = \dfrac{1}{1 - z_n}$ et en déduire l'expression de $z_{n+3}$ en fonction de $z_n$.

**d.** On suppose que $a = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer $z_{2016}$.

## Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $D = ]-\infty\,; -1[ \cup ]-1\,; 1[ \cup ]1\,; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

### Partie A. — Étude d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

**1.** Étudier les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**2.** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ puis étudier son signe. En déduire les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Dresser le tableau de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**4.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ puis déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ en fonction de $x$.

**5.** Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

### Partie B. — Étude de la fonction $f$

**1.** Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**2.** Déterminer les limites de $f$ en 1 en distinguant limite à droite et limite à gauche.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

Dans toute la suite, on admet que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

**3.** Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis étudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signe en utilisant les résultats de la **Partie A**.

**4.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $D$. (On ne cherchera pas à déterminer $f(\alpha)$.)

### Partie C. — Écart entre deux courbes

On note $d$ la droite d'équation $y = x + 2$. On pose, pour tout $x \in D$, $e(x) = f(x) - (x + 2)$.

**1.** Étudier la limite de $e(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**2.** En résolvant, par le calcul, une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant \alpha$ tel que $e(n) \leqslant 10^{-1}$.

## Exercice 3 (5 points)

Dans un lycée, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse. On a pu constater que :

- le technicien vient la première semaine ;
- si le technicien intervient lors d'une semaine, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine suivante est 0,75 ;
- si le technicien n'intervient pas lors d'une semaine, la probabilité qu'il intervienne la semaine suivante est 0,1.

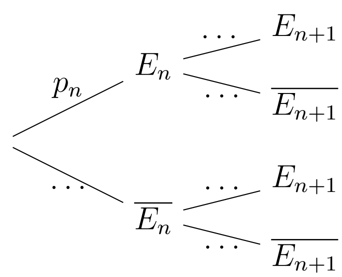
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $E_n$ l'évènement « le technicien intervient la $n-$ième semaine » et on note $p_n$ la probabilité de l'évènement $E_n$.

**1. a.** Quelle est la valeur de $p_1$ ?

**b.** Justifier que $p_2 = 0{,}75$ puis montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p_3 = 0{,}5875$.

**c.** Sachant que le technicien est intervenu la troisième semaine, déterminer, sous forme d'une fraction irréductible, la probabilité qu'il soit aussi intervenu la deuxième semaine.

**2. a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.




**b.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0{,}65p_n + 0{,}1$.

**c.** Montrer que la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{7}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

**d.** En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$.

**e.** Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

**3.** On admet dans cette question que la suite $(p_n)$ est décroissante.

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | K et J sont des entiers naturels |
| | P est un nombre réel |
| Initialisation : | P prend la valeur 1 |
| | J prend la valeur 1 |
| Entrée : | Saisir la valeur de K |
| Traitement : | Tant que P $\geqslant \dfrac{2}{7} + 10^{-\text{K}}$ |
| |     P prend la valeur 0,65P + 0,1 |
| |     J prend la valeur J + 1 |
| | Fin tant que |
| Sortie : | Afficher J |

On fait fonctionner cet algorithme en saisissant un entier naturel K en entrée. Que représente pour la suite $(u_n)$ le résultat affiché en sortie ?

## Exercice 4 (4 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

**1.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a) $(u_n)$ est monotone. b) $(u_n)$ est minorée par 0.

c) $(u_n)$ est convergente. d) $(u_n)$ est divergente.

**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$.

e) $(v_n)$ converge vers 1. f) $(v_n)$ converge vers 0.

g) Pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = 1$ h) $(v_n)$ diverge vers $+\infty$.

**3.** Soit $a$ un réel strictement positif. On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + a}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$,

i) $g'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + a}}$ j) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$

k) $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$ $\ell$) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + a}}$

**4.** On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé, $T$ la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse $-1$ et $T'$ la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1. Les droites $T$ et $T'$ sont

m) confondues.

n) strictement parallèles.

o) sécantes au point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

p) sécantes au point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$.