Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement de spécialité (B)

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Soit a un nombre complexe différent de 0 et 1.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = a$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 1 - \dfrac{1}{z}$ d'inconnue z.

b. Que peut-on dire de la suite (z_n) si a est une solution de (E) ?

2. **a.** On suppose que $a = \mathrm{i}$. Calculer sous forme algébrique z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b. On a calculé les 7 premiers termes de la suite (z_n) pour différentes valeurs de a.

- Cas où $a = 2$

z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
2	0,5	-1	2	0,5	-1	2

- Cas où $a = 1 + 2\mathrm{i}$

z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$1+2\mathrm{i}$	0,8+0,4i	0,5i	$1+2\mathrm{i}$	0,8+0,4i	0,5i	$1+2\mathrm{i}$

- Cas où $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$

z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$\mathrm{i}\sqrt{3}$	$1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\mathrm{i}\sqrt{3}$	$1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\mathrm{i}\sqrt{3}$

Quelle conjecture peut-on faire concernant la suite (z_n) ?

c. Dans cette question, a est à nouveau un complexe quelconque différent de 0 et 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $z_{n+2} = \dfrac{1}{1 - z_n}$ et en déduire l'expression de z_{n+3} en fonction de z_n.

d. On suppose que $a = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer z_{2016}.

Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $D =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A. — Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ puis étudier son signe. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ en fonction de x.
5. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie B. — Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer les limites de f en 1 en distinguant limite à droite et limite à gauche.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?

Dans toute la suite, on admet que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

3. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ puis étudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signe en utilisant les résultats de la **Partie A**.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D. (On ne cherchera pas à déterminer $f(\alpha)$.)

Partie C. — Écart entre deux courbes

On note d la droite d'équation $y = x + 2$. On pose, pour tout $x \in D$, $e(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. Étudier la limite de $e(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. En résolvant, par le calcul, une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant \alpha$ tel que $e(n) \leqslant 10^{-1}$.

Exercice 3 (5 points)

À TRAITER SUR UNE COPIE SÉPARÉE

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer u_1 et v_1.

2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
On admet que ceci implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer $B + C$, B^2, C^2, BC et CB.
- **b.** Calculer à la main $B + 3C$ et comparer la matrice obtenue avec A.

4.
- **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = B + 3^n C$.
- **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n - 1$ et $v_n = 3^n - 1$.
- **c.** Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On considère l'algorithme suivant.

Variables :	M est un réel et N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur 1
	N prend la valeur 0
Entrée :	Saisir la valeur de M
Traitement :	Tant que U < M
	N prend la valeur N + 1
	U prend la valeur $2 \times 3^{\mathrm{N}} - 1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher N

On fait fonctionner cet algorithme en saisissant un réel M en entrée. Que représente pour la suite (u_n) le résultat affiché en sortie ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- **a.** Justifier que la matrice A^n est inversible.
- **b.** Existe-t-il des réels r_n et t_n tels que $(A^n)^{-1} = r_n B + s_n C$?

Exercice 4 (4 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a) (u_n) est monotone. b) (u_n) est minorée par 0.
c) (u_n) est convergente. d) (u_n) est divergente.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$.

e) (v_n) converge vers 1. f) (v_n) converge vers 0.
g) Pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = 1$ h) (v_n) diverge vers $+\infty$.

3. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + a}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

i) $g'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+a}}$ j) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
k) $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}$ ℓ) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a}}$

4. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormé, T la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse -1 et T' la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1. Les droites T et T' sont

m) confondues.
n) strictement parallèles.
o) sécantes au point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{4}\right)$.
p) sécantes au point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$.