Correction du devoir surveillé de mathématiques du 13/12/14

Exercice 1

1. **a.** $f(1+2\mathrm{i}) = (1+2\mathrm{i})^2 + 2(1+2\mathrm{i}) + 9 = 1 + 4\mathrm{i} - 4 + 2 + 4\mathrm{i} + 9$ soit $\boxed{f(1+2\mathrm{i}) = 8 + 8\mathrm{i}}$.

   b. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, grâce aux propriétés de la conjugaison, $f(\bar{z}) = \bar{z}^2 + 2\bar{z} + 9 = \overline{z^2} + \overline{2z} + \bar{9} = \overline{z^2 + 2z + 9}$ donc $\boxed{f(\bar{z}) = \overline{f(z)}}$.

   c. Dès lors, $f(1-2\mathrm{i}) = f(\overline{1+2\mathrm{i}}) = \overline{f(1+2\mathrm{i})} = \overline{8+8\mathrm{i}}$ donc $\boxed{f(1-2\mathrm{i}) = 8 - 8\mathrm{i}}$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 5$ équivaut à $z^2 + 2z + 4 = 0$. Le discriminant du trinôme $z^2 + 2z + 4$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$ donc l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-2 - \mathrm{i}\sqrt{12}}{2 \times 1} = \dfrac{-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Ainsi, <u>l'ensemble des solutions de $z^2 + 2z + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$ est $\left\{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$</u>.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z, $f(z) = k$ équivaut à $z^2 + 2z + 9 - k = 0$. Le discriminant du trinôme $z^2 + 2z + 9 - k$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (9 - k) = -32 + 4k$. Or, l'équation $f(z) = k$ admet deux solutions complexes conjuguées distinctes si et seulement si $\Delta < 0$ i.e. si et seulement si $-32 + 4k < 0$ i.e. $k < 8$.

   On conclut que l'ensemble des réels k tels que $f(z) = k$ admet deux solutions complexes conjuguées distinctes est $]-\infty\,;8[$.

4. **a.**

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y) + 9 \\
f(z) &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y + 9 \\
f(z) &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y) \\
f(z) &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + 2\mathrm{i}y(x + 1)
\end{aligned}
$$

   donc la forme algébrique de $f(z)$ est bien $\boxed{f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + 2\mathrm{i}y(x+1)}$.

   b.

$$M(z) \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

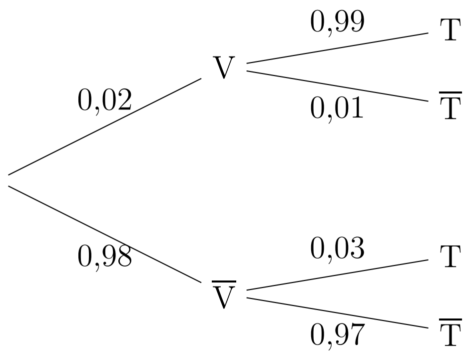
   Ainsi, (E) est la réunion de la droite D_1 d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) et de la droite D_2 d'équation $x = -1$.

Exercice 2

Question	Sujet A	Sujet B
1	b)	D)
2	c)	E)
3	b)	J)
4	c)	P)

Explication

Pour la partie A, on peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(\overline{\text{V}} \cap \text{T}) = 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}294$. De plus, la probabilité que le test soit positif est $P(\text{T}) = 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0492$.

Pour la partie B, choisir une personne au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}02$ en prenant comme succès : « la personne est contaminée ».

Choisir 10 personnes au hasard en assimilant cela à des tirages avec remise revient à répéter 10 fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante. Cela constitue donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}02$. On en déduit que la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10, 0{,}02)$. A l'aide de la calculatrice, on en déduit que $P(X = 1) \approx 0{,}167$ et $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}0162$.

Exercice 3

Partie A

1. Comme g est une fonction polynôme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{-\infty} g = -\infty}$.

2. Comme g est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x - 1)(2x + 1)$. Ainsi, $g'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. De plus, son coefficient dominant est $a = 12 > 0$ donc $g'(x) \geq 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.
On conclut donc que g est croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3. On déduit des questions précédentes le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$ ↗	-7 ↘	-9 ↗	0 ↗	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, le maximum de g est -7 donc, pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, $g(x) \leq -7$ et donc $g(x) \neq 0$. Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$.
Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, la fonction g est continue car dérivable et strictement croissante. De plus, $g(\frac{1}{2}) = -9$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ donc $0 \in \left[g(\frac{1}{2})\,;\lim\limits_{+\infty} g\right[$. On déduit alors du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
Finalement, on conclut que $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de } g(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}}$.
5. Etant donné que $g(1{,}45) \approx -0{,}16 < 0$ et $g(1{,}46) \approx 0{,}07 > 0$, on a l'encadrement $\boxed{1{,}45 \leq \alpha \leq 1{,}46}$.
6. On déduit du tableau de variation de g que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\alpha]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1. **a.** Comme f est une fonction rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4}$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

   b. D'une part, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x^3+1 = \frac{9}{8}$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 4x^2-1 = 0$ et, on a vu dans la question 2 de la partie A que si $x \geq \frac{1}{2}$ alors $4x^2 - 1 \geq 0$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} 4x^2 - 1 = 0^+$. On conclut, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty}$.

   On en déduit que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(4x^2-1)-(x^3+1)(8x)}{(4x^2-1)^2} = \frac{12x^4-3x^2-8x^4-8x}{(4x^2-1)^2} \\ &= \frac{4x^4-3x^2-8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{x(4x^3-3x-8)}{(4x^2-1)^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}}$.
Comme $x > \frac{1}{2}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. On déduit alors de la question 6 de la partie A que $f'(x) \leq 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}\,;\alpha\right]$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \in [\alpha\,;+\infty[$.
3. On en déduit que f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\alpha\right]$ puis croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
4. Par définition, $g(\alpha) = 0$ i.e. $4\alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0$ donc $4\alpha^3 = 3\alpha + 8$ soit $\alpha^3 = \frac{3}{4}\alpha + 2$. En divisant par α, on en déduit que $\alpha^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{\alpha}$.
Dès lors,

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} = \frac{\frac{3}{4}\alpha+2+1}{4\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{\alpha}\right)-1} = \frac{\frac{3}{4}\alpha+3}{2+\frac{8}{\alpha}} = \frac{\frac{3(\alpha+4)}{4}}{\frac{2(\alpha+4)}{\alpha}} = \frac{3(\alpha+4)}{4} \times \frac{\alpha}{2(\alpha+4)}$$

et donc, en simplifiant par $\alpha + 4$, on aboutit à $\boxed{f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha}$.

On avait vu que $1{,}45 \leq \alpha \leq 1{,}46$ donc $\frac{3\times 1{,}45}{4} \leq \frac{3}{8}\alpha \leq \frac{3\times 1{,}46}{8}$ d'où l'on déduit que $\boxed{0{,}54 \leq f(\alpha) \leq 0{,}55}$.

Partie C

1. Voir l'annexe.
2. On peut conjecturer que $\mathscr{C}$ est au-dessus de D sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Pour démontrer cette conjecture, posons, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $d(x) = f(x) - \frac{1}{4}x$. Ainsi, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$,

$$d(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{1}{4}x = \frac{4(x^3+1) - x(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} = \frac{4x^3+4-4x^3+x}{4(4x^2-1)} = \frac{x+4}{4(4x^2-1)}.$$

Or, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $x+4 > 0$ et $4x^2 - 1 > 0$ (déjà vu dans la partie A), donc $d(x) > 0$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } D \text{ sur } \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$.

3. Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, la distance MN est le nombre $d(x)$. Or,

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{16x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{16x} = 0.$$

Ainsi lorsque x tend vers $+\infty$, la distance MN tend vers 0. (Graphiquement, cela signifie que $\mathscr{C}$ et D deviennent infiniment proche au voisinage de $+\infty$. On dit que D est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.)

Exercice 4 (Enseignement obligatoire)

1. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = -\left(-\frac{4}{(x+2)^2}\right) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[}$.
2. Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x &\Leftrightarrow 5(x+2) - 4 = x(x+2) \\ &\Leftrightarrow 5x + 10 - 4 - (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 6 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $-x^2 + 3x + 6$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 33 > 0$ donc ce trinôme a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{33}}{-2} = \frac{3-\sqrt{33}}{2}.$$

Comme une seule de ces racines est positive, on en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0\,;+\infty[$ qui est $c = x_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$.

3. a. Voir l'annexe.

   b. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et converge vers c.

4. a. Soit la proposition P_n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq c$.

   Par définition, $u_0 = 1$ donc $u_1 = 5 - \frac{4}{1+2} = \frac{11}{3} \approx 3{,}6$. Comme $c \approx 4{,}3$, on en déduit que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq c$ donc P_0 est vraie.

   Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

   Alors, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq c$ et, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(c)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et, par définition, $f(c) = c$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq c$ i.e. P_{n+1} est vraie.

   On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq c}$.

   b. La question précédente assure que (u_n) est croissante et majorée par c donc, d'après le théorème des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

5. a. On a vu que $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{11}{3}$. De plus, $u_2 = 5 - \dfrac{4}{\frac{11}{3}+2} = \frac{73}{17}$ donc $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$ et $S_2 = S_1 + u_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51}$. Ainsi, $S_0 = 1$, $S_1 \approx 4{,}67$ et $S_2 \approx 8{,}96$.

   b.

Entrée :	n un entier naturel
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur 1
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s + u$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher s.

   c. Comme la suite (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 1$. Il s'ensuite que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \geq \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

Exercice 4 (Enseignement de spécialité)

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{0+1}{2}$ soit $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{2}}$ et $v_1 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{0 + 2 \times 1}{3}$ soit $\boxed{v_1 = \dfrac{2}{3}}$.

2.

Entrée :	N un entier naturel
Initialisation :	U prend la valeur 0
	V prend la valeur 1
Traitement :	Pour k variant de 1 à N
	W prend la valeur U
	U prend la valeur $\dfrac{W+V}{2}$
	V prend la valeur $\dfrac{W+2V}{3}$
	Fin du Pour
Sortie :	Afficher U
	Afficher V

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_n+v_n}{2} \\ \frac{u_n+2v_n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{AX_n = X_{n+1}}$.

b. Soit la proposition P_n : « $X_n = A^n X_0$ ».
Etant donné que $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$, P_0 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, d'après la question a, $X_{k+1} = AX_k = AA^kX_0 = A^{k+1}X_0$ donc P_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$.

4. a. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{PP' = P'P = I_2 \text{ et } P'BP = A}$.

b. Soit la proposition Q_n : « $A^n = P'B^nP$ ».
Comme $P'B^0P = P'I_2P = P'P = I_2$ et $A^0 = I_2$, la proposition P_0 est vraie.
Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, grâce à la question a,

$$A^{k+1} = A^kA = (P'B^kP)(P'BP) = P'B^k(PP')BP = P'B^kI_2BP = P'B^kBP = P'B^{k+1}P$$

donc P_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = P'B^nP}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme B est diagonale, $B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}}$$

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après la question 3.b. Ainsi,

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}}$$

Etant donné que $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on en déduit que

$$\boxed{u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n}.$$

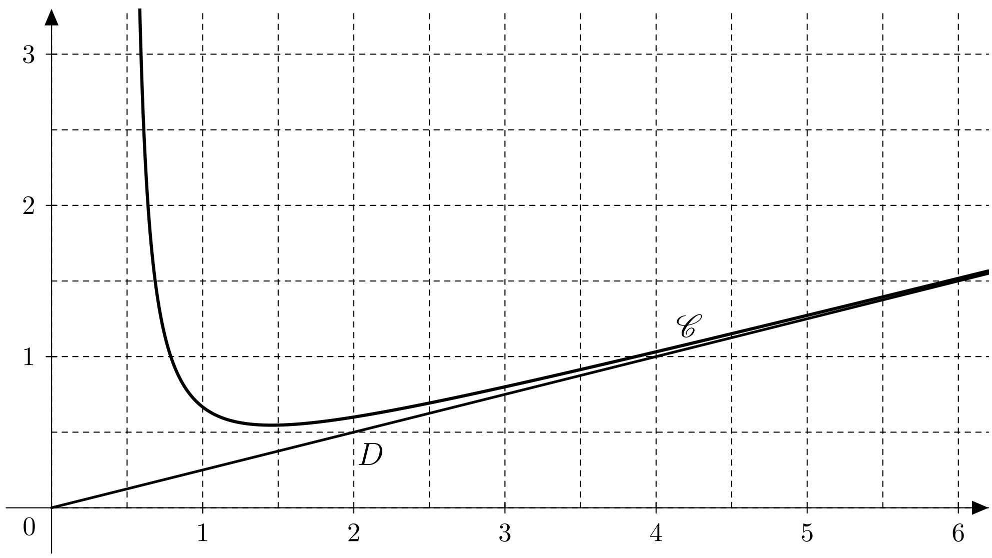
b. Etant donné que $-1 < \frac{1}{6} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ donc, par somme et produit,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{5}}.$$

Annexe

A rendre avec la copie

Exercice 3



Exercice 4