Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On désigne par A le point d'affixe i.

A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z^2}{\mathrm{i} - z}$.

1. Déterminer l'affixe z' de M' dans le cas où M est le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{i}$.

2. Déterminer les affixes z des points M tels que $z' = z$.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

- **a.** Démontrer que la partie réelle de z' est $\dfrac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$.
- **b.** En déduire l'ensemble (E) des points M tels que le point M' est situé sur l'axe des imaginaires purs.

Exercice 2 (5 points)

LES ELEVES DE TS3 DOIVENT TRAITER CET EXERCICE SUR UNE COPIE SEPAREE.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. La justification consistera à démontrer l'affirmation si celle-ci est vraie et à donner un contre-exemple si celle-ci est fausse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

Affirmation 1. Pour tout entier naturel n, le nombre $n(n^6 - 1)$ est divisible par 7.

Affirmation 2. Pour tous entiers naturels non nuls a, p, q et n, si $p \equiv q\ [n]$ alors $a^p \equiv a^q\ [n]$.

Affirmation 3. Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre 2, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Affirmation 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

Affirmation 5. Pour tous réels a et b tels que $2ab = 1$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $N = \begin{pmatrix} -a & b & a \\ b & -2b^3 & b \\ a & b & -a \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse à un site internet qui propose différents jeux en ligne.

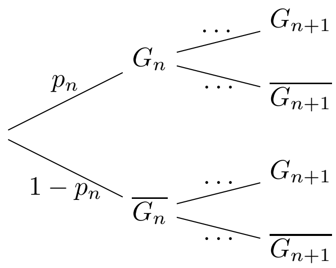
Partie A. — Pour un premier jeu, on sait que

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la $n-$ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

- **a.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.
- **c.** Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B. — Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes et que la probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

- **b.** Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.
- **c.** Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30€ pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8€.

- **a.** Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
- **b.** Calculer la probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€. On arrondira le résultat à 10^{-5} près.

Exercice 4 (7 points)

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire h

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x.
2. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
6. Déterminer le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Partie B. – Etude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?
3. Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 1.
   Quelle conséquence graphique peut-on tirer de ces limites ?

Dans la suite, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie C. – Etude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Pour tout réel $x \neq 1$, on pose $d(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $d(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-1}$.
2. Etudier le signe de $d(x)$ en fonction de x et en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   On montrera en particulier que les deux courbes se coupent en un unique point A dont on donnera les coordonnées.
3. Dans cette question, on cherche à minimiser l'écart $d(x)$ lorsque $x \in]-\infty\,;1[$.
   a. Démontrer que, pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-1)^2}$ où h est la fonction définie en partie A.
   b. En déduire que, sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, l'écart $d(x)$ est minimal pour $x = \alpha$.
   c. On note T_f et T_g les tangentes respectives à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse α.
   Les droites T_f et T_g sont-elles parallèles ?