Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

Proposition 1 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E) »

2. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$

Proposition 2 : « Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7 »

3. **Proposition 3 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7, alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 »

4. A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 quelconques.

Proposition 4 : « On a : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ »

5. On considère le système : (S) $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = -4 \\ 5x - (4+\lambda)y = 5 \end{cases}$ où λ est un réel

Proposition 5 : « le système possède un unique couple solution (x, y) sauf pour deux valeurs du réel λ »

CORRECTION de l'exercice de spécialité – devoir du 20/04/2013

1) Pour l'équation $x^2 - 52x + 480 = 0$ (E) on a $\Delta = 784 = 28^2$ et deux racines : 40 et 12. On cherche deux entiers *a* et *b*

On a toujours $PGCD(a,b) < PPCM(a,b)$ d'une part. Donc si le problème est possible, on a nécessairement $PGCD(a,b) = 12 \quad et \quad PPCM(a,b) = 40$

Mais, d'autre part, le $PGCD(a,b)$ doit diviser le $PPCM(a,b)$ mais 12 ne divise pas 40. Donc il n'y a pas de solution au problème

La proposition 1 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E) » est **FAUSSE**

2) $N = \overline{aba7}$ en base 10. On a donc $N = 7 + 10a + 100b + 1000a$

On a les congruences modulo 7 suivantes : $\begin{cases} 10 \equiv 3[7] \\ 100 \equiv 30 \equiv 2[7] \\ 1000 \equiv 20 \equiv -1[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{cases}$

On a donc : $N = 7 + 10a + 100b + 1000a \equiv 3a + 2b - a[7]$ ou encore $N \equiv 2a + 2b \equiv 2(a+b)[7]$

Si N est divisible par 7, alors $N \equiv 0[7]$ et $2(a+b) \equiv 0[7]$

Ceci signifie que 7 divise $2(a+b)$ mais 7 ne divise pas 2 donc grâce au théorème de Gauss 7 divise $a+b$

La proposition 2 : « Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7 » est donc **VRAIE**

3) • Si d est un diviseur commun à $3n+4$ et $4n+3$, alors d divise toute combinaison linéaire de $3n+4$ et $4n+3$, donc en particulier d divise $4(3n+4) - 3(4n+3) = 7$

Donc d = 1 ou d = 7

• D'autre part : si $n \equiv 1[7]$ alors $\begin{cases} 3n \equiv 3[7] \\ 4n \equiv 4[7] \end{cases}$ et $\begin{cases} 3n+4 \equiv 7 \equiv 0[7] \\ 4n+3 \equiv 7 \equiv 0[7] \end{cases}$

Donc 7 divise $3n+4$ et $4n+3$

Finalement le $PGCD$ de $3n+4$ et $4n+3$ est 7

La proposition 3 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7, alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 » est **VRAIE**

4) Pour A et B deux matrices carrées d'ordre 2 quelconques on a :

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ mais AB n'est pas égal à BA en général. Pour le prouver, il suffit de prendre un contre-exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Proposition 4 : « On a : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ » est **FAUSSE**

5) (S) $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = -4 \\ 5x - (4+\lambda)y = 5 \end{cases}$ avec λ réel.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 5 & -(4+\lambda) \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$(S) \Leftrightarrow AX = B$

Cette équation possède une solution unique $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si et seulement si la A est inversible

Or A est inversible si et seulement si $\det A = -(3-\lambda)(4+\lambda) + 10 \neq 0$

C'est-à-dire : $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$ donc pour $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$

La proposition 5 : « le système possède un unique couple solution (x, y) sauf pour deux valeurs du réel λ » est **VRAIE**

<u>Résumé :</u>

Proposition 1	FAUSSE
Proposition 2	VRAIE
Proposition 3	VRAIE
Proposition 4	FAUSSE
Proposition 5	VRAIE