Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

- **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- **b.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.
- **c.** En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

- **a.** Déterminer la limite de g en 0.
- **b.** Démontrer que, pour tout $x>0$, $g(x)=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.
- **c.** Démontrer que, pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.
- **d.** Etudier le signe de $g'(x)$ en fonction de x puis dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- **a.** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
- **b.** Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4.
- **a.** Résoudre l'équation $(\ln x)^2-3\ln x+1=0$.
- **b.** Pour tout réel $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a et T'_a la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a.
  Démontrer qu'il existe exactement deux réels a dont on donnera les valeurs exactes pour lesquels T_a et T'_a sont parallèles.

Exercice 2 (5 points)

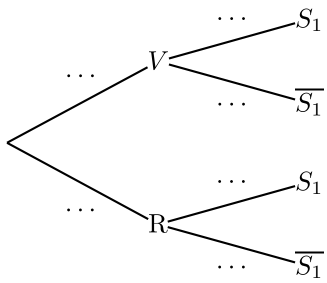
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces qui sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_V(S_n)$ et $P_R(S_n)$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

c. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la suite (p_n) est croissante.

3. On s'intéresse au plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0,999$ pour tout $n \geq n_0$.

a. Pourquoi peut-on, sans le calculer, affirmer qu'un tel entier n_0 existe ?

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant de telle sorte qu'il affiche la valeur de n_0 en sortie lorsqu'on saisit une valeur de E en entrée qu'on précisera.

Variables	:	E est un réel strictement compris entre 0 et 1
		N est un entier naturel non nul
Entrée	:	E
Initialisation	:	Affecter à N la valeur 1
Traitement	:	Tant que ....
		| ....
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher N

c. Résoudre, par le calcul, l'inéquation $p_n \geq 0,999$ et en déduire la valeur de n_0.

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $7-3\mathrm{i}$.
Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\mathrm{i}| = |z+2\mathrm{i}|$.
Proposition 2 : (Δ) est une droite.
3. Soit $z = 3+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 4 : Si le module de z est égal à 1 alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 5 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\mathrm{i}+z| = 1+|z|$.

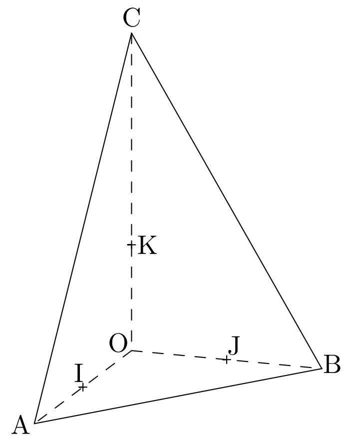
Exercice 4 (5 points)

Une unité étant fixée, on considère un tétraèdre de l'espace OABC tel que

- les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles en O ;
- $OA = OB = 2$ et $OC = 3$.

On note I le milieu de [OA], J le milieu de [OB] et K le point de [OC] tel que $OK = \frac{1}{3}OC$.

Nota bene : les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.



1. **a.** Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
b. Démontrer que les droites (IK) et (AC) sont sécantes en un point M.
On admet que, de même, (JK) et (BC) sont sécantes en un point N.
c. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. On note G le point de l'espace défini par
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}).$$
a. En utilisant uniquement la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}$.
Que peut-on en déduire concernant les quatre points I, J, K et G ?
b. On note E le milieu de [IJ]. Déduire de l'égalité précédente que $\overrightarrow{KG} = 2\overrightarrow{GE}$.
Que représente le point G pour le triangle IJK ?
3. Dans cette question, l'espace est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$. Ainsi, les coordonnées des points A, B, C et G sont $A\,(2\,;0\,;0)$, $B\,(0\,;2\,;0)$, $C\,(0\,;0\,;3)$ et $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (OG).
b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire une représentation paramétrique du plan (ABC).
c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (OG) sont sécants en un point H de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.
d. On note F le milieu de [AB].
Le point H appartient-il à la droite (CF) ?