Correction du devoir surveillé de mathématiques du 20/04/2013

Enseignement obligatoire

Exercice 1

1. **a.** Par théorème $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc, comme x tend vers 0 par valeurs supérieures, par quotient, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty}$.

b. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2}$ i.e. $\boxed{f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}}$.

c. Pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \ln(x)$. Or, $\ln(x) \leq 1$ si et seulement si $x \leq e$ donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0\,;e]$ et $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [e\,;+\infty[$. On conclut alors que $\underline{f \text{ est croissante sur }]0\,;e] \text{ et } f \text{ est décroissante sur } [e\,;+\infty[}$.

2. **a.** En remarquant que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) \times f(x)$, on déduit de la question 1 que, par produit, $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty}$.

b. Soit $x > 0$. Alors, $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\left(\ln \sqrt{x}^2\right)^2}{\sqrt{x}^2} = \left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ soit $\boxed{g(x) = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$.

Posons $X = \sqrt{x}$. Alors, $g(x) = 4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2$. Or, $\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ et, par théorème, $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

Par produit, on en déduit que $\lim_{X\to+\infty} 4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$ et donc, par composition, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

c. La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par produit et quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{\left(2\times\frac{1}{x}\times\ln x\right)\times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

soit $\boxed{g'(x) = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}}$.

d. Pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est le signe de $\ln(x)(2 - \ln x)$. Or, $\ln x \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$ et $2 - \ln x \geq 0$ si et seulement si $\ln x \leq 2$ i.e. $x \leq \mathrm{e}^2$. On peut alors dresser un tableau de signe :

x	0		1		e^2		$+\infty$
signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ce qui conduit au tableau de variation suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$4\mathrm{e}^{-2}$	↘	0

3. **a.** Pour étudier les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on résout dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=g(x)$:

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{(\ln x)^2}{x}\Leftrightarrow \ln x=(\ln x)^2\Leftrightarrow \ln x(1-\ln x)=0\Leftrightarrow \ln x=0 \text{ ou } \ln x=1\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=e.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les courbes } \mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g \text{ possèdent deux points communs : } A\,(1\,;0) \text{ et } B\left(e\,;e^{-1}\right)}$.

b. Pour étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $d(x)=f(x)-g(x)$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$. Or, pour tout $x>0$, $d(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\dfrac{\ln x(1-\ln x)}{x}$ donc le signe de $d(x)$ est le signe de $\ln x(1-\ln x)$. En procédant comme dans la question 2.d. on en déduit que $d(x)\leq 0$ pour tout $x\in\,]0\,;1]\cup[e\,;+\infty[$ et $d(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1\,;e]$. Ainsi, <u>sur $]0\,;1]$ et sur $[e\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ et, sur $[1\,;e]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.</u>

4. **a.** Notons (E) l'équation $(\ln x)^2-3\ln x+1=0$. Cette équation a un sens si et seulement si $x>0$. Pour tout $x>0$, posons $X=\ln x$. Alors, (E) s'écrit $X^2-3X+1=0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $X_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Il s'ensuit que

$$(E)\Leftrightarrow \ln x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \ln x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \text{ ou } x=\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}}$.

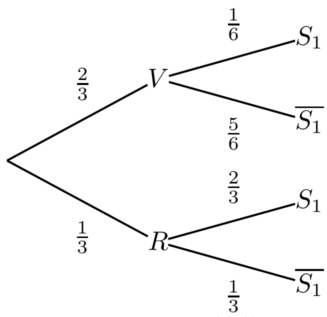
b. Soit $a>0$. Par définition, le coefficient directeur T_a est $f'(a)=\dfrac{1-\ln a}{a^2}$ et celui de T'_a est $g'(a)=\dfrac{2\ln a-(\ln a)^2}{a^2}$. On en déduit que T_a et T'_a sont parallèles si et seulement si

$$\frac{1-\ln a}{a^2}=\frac{2\ln a-(\ln a)^2}{a^2}\Leftrightarrow\frac{1-\ln a-2\ln a+(\ln a)^2}{a^2}\Leftrightarrow\frac{(\ln a)^2-3\ln a+1}{a^2}=0\Leftrightarrow(E).$$

On déduit alors de la question a. qu'il existe exactement deux valeurs de a pour lesquelles T_a et T'_a sont parallèles qui sont les solutions (E) à savoir $\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ et $\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 2

1. **a.**



b. Comme les événements R et V forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales assure que

$$P\left(S_1\right)=P(V)P_V\left(S_1\right)+P(R)P_R\left(S_1\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

donc $\boxed{P\left(S_1\right)=\dfrac{1}{3}}$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsqu'on lance un dé vert, la probabilité d'obtenir 6 est $\dfrac{1}{6}$. Comme les lancers sont indépendants, lorsqu'on lance n fois un dé vert, la probabilité d'obtenir 6 est $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. Ainsi, $\boxed{P_V(S_n) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$. De la même façon, $\boxed{P_R(S_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme dans la question 1, la formule des probabilités totales assure que

$$P\left(S_n\right) = P(V)P_V\left(S_n\right) + P(R)P_R\left(S_n\right)$$

donc $\boxed{P\left(S_n\right) = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$p_n = \frac{P(R \cap S_n)}{P(S_n)} = \frac{P(R)P_R(S_n)}{P(S_n)} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$, il vient

$$p_n = \frac{1}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{2}\right)^n + 1} \text{ soit } \boxed{p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}}.$$

d. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1}$.

3. **a.** Etant donné que (p_n) converge vers 1, par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $p_n \in \left]1 - 0{,}001\,; 1 + 0{,}001\right[$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $p_n \geq 0{,}999$.

b.

Variables	:	E est un réel strictement compris entre 0 et 1
		N est un entier naturel non nul
Entrée	:	E
Initialisation	:	Affecter à N la valeur 1
Traitement	:	Tant que $\dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{N}} + 1} < E$
		N prend la valeur N+1
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher N

En entrant la valeur E= 0,999, on obtient en sortie le premier entier N tel que $p_{\mathrm{N}} \geq 0{,}999$ et, comme (p_n) est croissante, cet entier est n_0.

c. En utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ et la croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, il vient :

$$\begin{aligned}
p_n \geq 0{,}999 &\Leftrightarrow \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 \leq \frac{1}{0{,}999} \\
&\Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{0{,}999} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1{,}998} - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1{,}998} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{1{,}998} - \frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \left(\text{car } \ln\left(\frac{1}{4}\right) < 0.\right)
\end{aligned}$$

Etant donné que $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{1{,}998} - \frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 5{,}5$, on en déduit que $\boxed{n_0 = 6}$.

Exercice 3

1. Calculons les longueurs des trois côtés de OAB :

$$\mathrm{OA} = |z_\mathrm{A}| = |2-5\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}, \quad \mathrm{OB} = |z_\mathrm{B}| = |7-3\mathrm{i}| = \sqrt{7^2+(-3)^2} = \sqrt{58}$$

$$\text{et}\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}| = |7-3\mathrm{i}-(2-5\mathrm{i})| = |5+2\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$$

Ainsi, OA = AB donc OAB est isocèle en A. De plus, $\mathrm{OB}^2 = 58$ et $\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = 29 + 29 = 58$ donc la réciproque du théorème de Pythagore assure que OAB est rectangle en A.
Conclusion : la proposition 1 est vraie.

2. Notons C et D les points d'abscisses respectives $z_\mathrm{C} = \mathrm{i}$ et $z_\mathrm{D} = -2\mathrm{i}$. Alors,

$$M(z) \in (\Delta) \Leftrightarrow |z-z_\mathrm{A}| = |z-z_\mathrm{B}| \Leftrightarrow \mathrm{A}M = \mathrm{B}M.$$

On en déduit que (Δ) est la médiatrice de [AB] donc c'est bien une droite.
Conclusion : la proposition 2 est vraie.

3. A l'aide de la calculatrice, on constate que $z^6 = -1728$ donc pour $n = 2$, z^{3n} n'est pas imaginaire pur.
Conclusion : la proposition 3 est fausse.

4. Soit z un nombre complexe de module 1. Par théorème, $z\overline{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$ donc $z = \frac{1}{\overline{z}}$.
Conclusion : la proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$. Alors, z est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est positive i.e. z est de la forme $z = \mathrm{i}k$ avec $k \in]0\,;+\infty[$. Dès lors, $|\mathrm{i}+z| = |\mathrm{i}+\mathrm{i}k| = |\mathrm{i}(1+k)| = |\mathrm{i}|\,|1+k| = 1+k$ car $|\mathrm{i}| = 1$ et $k > 0$. Or, $1+|z| = 1+|\mathrm{i}k| = 1+k$ car $k > 0$.
Conclusion : la proposition 5 est vraie.

Exercice 4

1. **a.** Comme I et J sont les milieux respectifs de [OA] et [OB], le théorème de la droite des milieux appliqué dans le triangle OAB assure que $\boxed{\text{(IJ) est parallèle (AB)}}$.

b. Commençons par remarquer que les droites (AC) et (IK) sont coplanaires donc elles sont soit sécantes soit parallèles. Or, d'après le théorème de la droite des milieux, la parallèle à (AC) passant par I coupe le segment [OC] en son milieu. Comme K n'est pas le milieu de [OC], on en déduit que (IK) n'est pas parallèle à (AC). Dès lors, $\boxed{\text{(IK) et (AC) sont sécantes en un point M}}$.

c. Comme les droites (IJ) et (AC) sont sécantes en M, le point M est commun aux plans (IJK) et (ABC) donc ceux-ci ne sont pas strictement parallèles. Par ailleurs, le point I appartient à (IJK) mais pas à (ABC) donc ces plans ne sont pas confondus. On en déduit qu'ils sont sécants et que leur intersection est une droite. De plus, d'après ce qui précède, cette droite passe par M et N donc, finalement, $\boxed{(\mathrm{ABC}) \cap (\mathrm{IJK}) = (\mathrm{MN})}$.

2. **a.** Sachant que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OJ}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}})$, $3\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OJ}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$. Or, par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OJ}} + \overrightarrow{\mathrm{OK}} = (\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GI}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GK}}) = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GI}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}} + \overrightarrow{\mathrm{GK}}.$$

On en déduit que $3\overrightarrow{\mathrm{OG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GI}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}} + \overrightarrow{\mathrm{GK}}$ donc $\vec{0} = \overrightarrow{\mathrm{GI}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}} + \overrightarrow{\mathrm{GK}}$ et donc, finalement, $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{KG}} = \overrightarrow{\mathrm{GI}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}}}$.

Cette égalité démontre que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GJ}}$ sont coplanaires et donc les quatre points I, J, K et G sont coplanaires.

b. Toujours grâce à la relation de Chasles, en utilisant le fait que E est le milieu de [IJ],

$$\overrightarrow{\mathrm{KG}} = \overrightarrow{\mathrm{GI}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}} = \overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{EI}} + \overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{EJ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{GE}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{EI}} + \overrightarrow{\mathrm{EJ}}}_{\vec{0}}.$$

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{KG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{GE}}}$.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{\mathrm{KG}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{GK}} + \overrightarrow{\mathrm{KE}})$ donc $3\overrightarrow{\mathrm{KG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{KE}}$ i.e. $\overrightarrow{\mathrm{KG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{KE}}$. Ainsi, G est le point situé sur la médiane aux deux tiers en partant du sommet K donc G est le centre de gravité du triangle IJK.

3. **a.** La droite (OG) passe par O et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OG}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ donc une représentation paramétrique de la droite (OG) est $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = \frac{1}{3}t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;2\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;0\,;3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC). Il s'ensuit qu'une représentation paramétrique de (ABC) est $\begin{cases} x = 2 - 2k - 2k' \\ y = 2k \\ z = 3k' \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$.

c. Pour étudier l'intersection du plan (ABC) et de la droite (OG), nous allons résoudre le système $(S)\begin{cases} \frac{1}{3}t = 2 - 2k - 2k' \\ \frac{1}{3}t = 2k \\ \frac{1}{3}t = 3k' \end{cases}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}t = 2 - 2\times\frac{1}{6}t - 2\times\frac{1}{9}t \\ \frac{1}{6}t = k \\ \frac{1}{9}t = k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t + \times\frac{2}{9}t = 2 \\ \frac{1}{6}t = k \\ \frac{1}{9}t = k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{9}t = 2 \\ \frac{1}{6}t = k \\ \frac{1}{9}t = k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ k = \frac{3}{8} \\ k' = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Comme (S) admet une unique solution, on en déduit que (ABC) et (OG) sont sécants en un point H. De plus, ce point est le point de paramètre $t = \frac{9}{4}$ pour la représentation paramétrique de (OG) déterminée à la question 1 donc les coordonnées de H sont $\left(\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\,;\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\,;\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\right)$ i.e. $\boxed{\mathrm{H}\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right)}$.

d. Les coordonnées de F sont $\left(\frac{2+0}{2}\,;\frac{0+2}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)$ i.e. $\mathrm{F}(1\,;1\,;0)$. Dès lors, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont respectivement $\overrightarrow{CF}\,(1\,;1\,;-3)$ et $\overrightarrow{CH}\,\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\,;-\frac{9}{4}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires i.e. C, F et H sont alignés et donc $\boxed{\text{H appartient à (CF)}}$.