Corrigé du surveillé de mathématiques du 10/10/15

Exercice 1

1. **a.** $P(-2) = (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 21 \times (-2) + 34 = -8 + 16 - 42 + 34$ soit $\boxed{P(-2) = 0}$.

   b. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $(z+2)(z^2+2z+17) = z^3+2z^2+17z+2z^2+4z+34 = z^3+4z^2+21z+34 = P(z)$. Ainsi, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z+2)(z^2+2z+17)}$.

   c. En utilisant la question précédente :

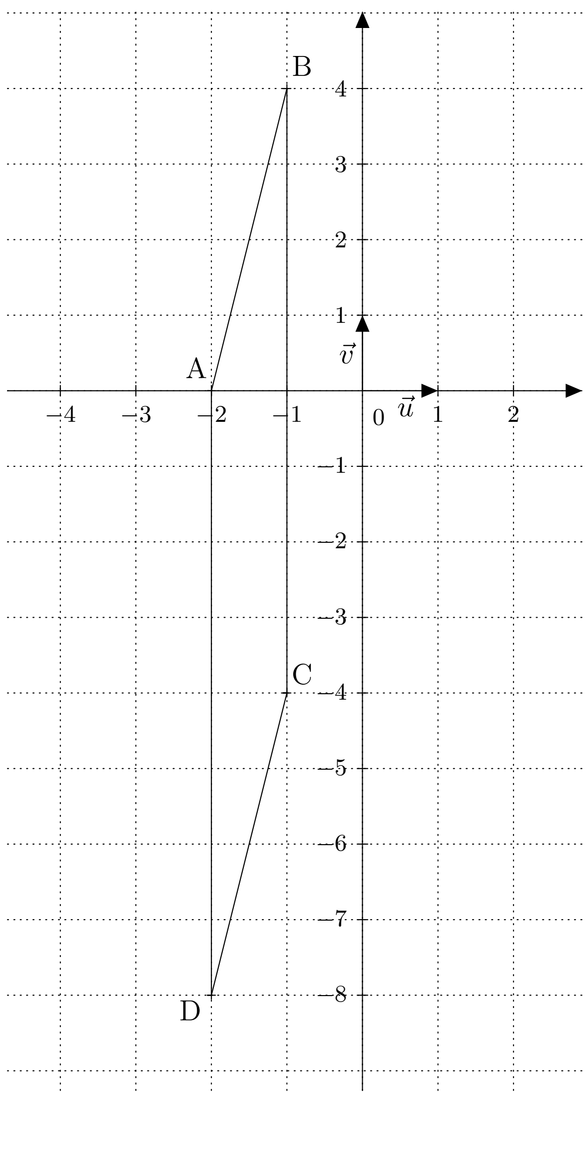
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2+2z+17) = 0 \Leftrightarrow z+2 = 0 \text{ ou } z^2+2z+17 = 0.$$

   Or, d'une part, $z+2 = 0$ si et seulement si $z = -2$. D'autre part, le discriminant de $z^2+2z+17$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 17 = -64 < 0$ donc l'équation $z^2 + 2z + 17 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{-2 - \mathrm{i}\sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 8\mathrm{i}}{2} = -1 - 4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -1 + 4\mathrm{i}.$$

   On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{C} \text{ de } P(z) = 0 \text{ est } \{-2\ ;\ -1-4\mathrm{i}\ ;\ -1+4\mathrm{i}\}}$.

2. **a.**



b. Le point D est tel que ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. En affixes, cela se traduit par

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} &\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C + z_A - z_B \\ &\Leftrightarrow z_D = -1 - 4\mathrm{i} - 2 - (-1 + 4\mathrm{i}) \Leftrightarrow z_D = -2 - 8\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'affixe de D est $\boxed{z_D = -2 - 8\mathrm{i}}$.

Exercice 2

1. Le discriminant de $z^2 - 4z + 6$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -8 < 0$ donc l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$. Dès lors, par propriété, $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$. Or, $z_1 = \dfrac{-(-4) - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 2 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $z_1 + z_2 = 2 \times 2 = 4$. Ainsi, $z_1 + z_2$ n'est pas imaginaire pur. L'affirmation est FAUSSE.
2. Etant donné que $\dfrac{13 + 2\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}} = \dfrac{(13 + 2\mathrm{i})(5 + \mathrm{i})}{5^2 + 1^2} = \dfrac{65 + 13\mathrm{i} + 10\mathrm{i} - 2}{26} = \dfrac{63 + 23\mathrm{i}}{26} = \dfrac{63}{26} + \dfrac{23}{26}\mathrm{i}$, la partie réelle de $\dfrac{13 + 2\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$ est $\dfrac{63}{26}$. L'affirmation est donc FAUSSE.
3. Soit z un complexe non nul. Alors, par propriété,
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z} + \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$$
donc $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ réel. L'affirmation est VRAIE.
4. L'équation proposée a un sens si et seulement si $\overline{z} \neq -2$ i.e. $z \neq -2$. Pour tout complexe $z \neq -2$,
$$\frac{\mathrm{i}}{\overline{z} + 2} = 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{z} + 2}{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{z} + 2 = \frac{\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow \overline{z} = -2 + \frac{\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow z = -2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de $\dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z} + 2} = 2$ dans $\mathbb{C}$ est $\left\{-1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$. L'affirmation est donc FAUSSE.
5. Etant donné que $(1 + \mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$, $(1 + \mathrm{i})^4 = \left[(1 + \mathrm{i})^2\right]^2 = (2\mathrm{i})^2 = -4$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,
$$(1 + \mathrm{i})^{4k+2} = (1 + \mathrm{i})^{4k} \times (1 + \mathrm{i})^2 = \left[(1 + \mathrm{i})^4\right]^k \times 2\mathrm{i} = (-4)^k \times 2\mathrm{i} = 2(-4)^k\mathrm{i}.$$
Comme $2(-4)^k$ est réel, $(1 + \mathrm{i})^{4k+2}$ est imaginaire pur. Ainsi, l'affirmation est VRAIE.

Exercice 3

1. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2$ donc $\boxed{u_1 = 2}$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2$ donc $\boxed{u_2 = 6}$.
2. Étant donné que $u_1 - u_0 = 2 \neq 4 = u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
Étant donné que $u_0 = 0$, si (u_n) était géométrique de raison q alors $u_1 = qu_0 = 0$. Or, $u_1 = 2 \neq 0$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
3. L'algorithme qui convient est l'algorithme 2 car pour calculer u_i grâce à la formule de récurrence, il faut utiliser le terme de rang $i - 1$. Ainsi, pour calculer u_1 dans le premier tour de boucle, il faut prendre $i = 0$ et pour calculer u_n dans le dernier tour de boucle, il faut prendre $i = n - 1$.
4. **a.** On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 \geq 0$ car $n \geq 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

5. a. Supposons qu'ils existent trois entiers a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$ alors $0 = u_0 = c$, $2 = u_1 = a + b + c$ et $6 = u_2 = 4a + 2b + c$. Ainsi, a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 2 - a \\ 4a + 2(2 - a) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 2 - a \\ 2a + 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } a, b \text{ et } c \text{ existent alors } a = b = 1 \text{ et } c = 0}$.

b. Soit la proposition P_n : « $u_n = n^2 + n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_0 = 0$ et $0^2 + 0 = 0$ donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ i.e. que $u_k = k^2 + k$.
On va montrer que P_{k+1} est vraie i.e. que $u_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1)$.
Comme P_k est vraie, $u_{k+1} = u_k + 2k + 2 = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$. Or, $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + 3k + 2$ donc $u_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1)$. Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n}$.

6. a. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n + 2$. Ainsi, le terme général de la suite (v_n) est de la forme $an + b$ où a et b sont deux constantes donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $a = 2$ et de premier terme $u_0 = b = 2$.

b. La suite (v_n) étant arithmétique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} = \dfrac{(n+1)(2 + 2n + 2)}{2} = \dfrac{2(n+1)(n+2)}{2}$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = (n+1)(n+2)}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) \cdots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) \\ &= -u_0 + (u_1 - u_1) + (u_2 - u_2) + \cdots + (u_n - u_n) + u_{n+1} \\ &= -u_0 + u_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_n = u_{n+1} - u_0}$.

Étant donné que $u_0 = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ donc $u_n = S_n - 2n - 2 = (n+1)(n+2) - 2n - 2 = n^2 + 3n + 2 - 2n - 2$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n}$.

7. Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = w_{n+1} - w_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = rn + t$ donc (t_n) est arithmétique de raison r et de premier terme $t_0 = t$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} t_k = \frac{(n+1)(t_0 + t_n)}{2} = \frac{(n+1)(t + rn + t)}{2} = \frac{(n+1)(rn + 2t)}{2}.$$

Or, comme précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_0 = w_{n+1}$$

donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{(n+1)(rn + 2t)}{2}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n + rn + t = \dfrac{(n+1)(rn + 2t)}{2}$ donc

$$w_n = \frac{rn^2 + 2nt + rn + 2t}{2} - rn - t = \frac{rn^2 + 2nt + rn + 2t - 2rn - 2t}{2} = \frac{rn^2 + 2nt - rn}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n(rn + 2t - r)}{2}}$.