Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

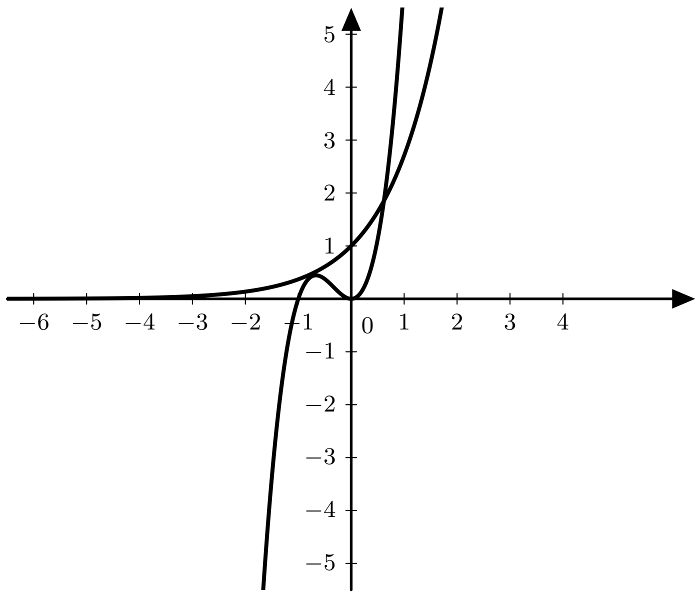
L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

EXERCICE 1 **5 points**

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) d'inconnue x réelle : $\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A. — Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B. — Étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier, selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

b. Déterminer les variations de la fonction h.

Dans la suite, on pourra, si on le souhaite, utiliser sans justification les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} h(x) = -\infty.$$

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 2 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte. Chaque réponse rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera, sur la copie, le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Soit ABCD un tétraèdre et G le point défini par $\overrightarrow{\text{AG}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AC}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}$.

A. G est aligné avec les milieux respectifs des arêtes [AD] et [BC].

B. G est aligné avec le point B et le point L défini par $\overrightarrow{\text{DL}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}$.

C. G est le milieu de [BD].

Dans les questions qui suivent, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

Dans ce repère, on considère les points A $(1\,;-1\,;2)$, B $(3\,;3\,;8)$, C $(-3\,;5\,;4)$ et D $(1\,;2\,;3)$.

2. **D.** D est le milieu de [AB].

E. Le triangle ABC est équilatéral.

F. Le triangle ABC est rectangle en A.

3. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

G. $\begin{cases} x = -4+t \\ y = 3+2t \\ z = 1+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **H.** $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 6+4t \\ z = 4+6t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **I.** $\begin{cases} x = -3+t \\ y = 5-t \\ z = 4+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

On considère maintenant la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5+t \\ y = 2t \\ z = 1-5t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ et la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6-k \\ y = 2-2k \\ z = -4+4k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$ ainsi que le plan (P) qui passe par le point E $(2\,;1\,;0)$ et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\,(3\,;2\,;3)$ et $\vec{v}\,(1\,;0\,;4)$.

4. Les droites (d) et (d') sont : **J.** sécantes ; **K.** parallèles ; **L.** non coplanaires.

5. La droite (d) est :

M. sécante à (P) **N.** strictement parallèle à (P) ; **O.** incluse dans à (P).

Exercice 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

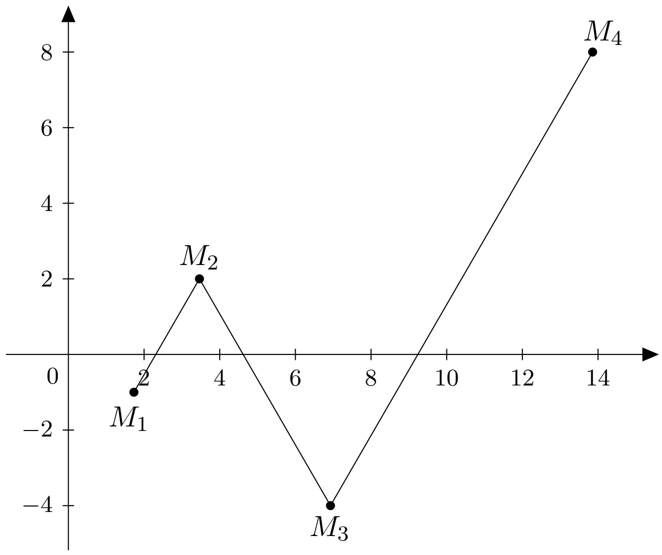
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.

a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.

Sur la figure ci-dessous, on a placé les points M_1, M_2, M_3 et M_4 et tracé les segments M_1M_2, M_2M_3 et M_3M_4.



3. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

4. Dans toute cette question, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie la plus petite valeur de l'entier n tel que $\ell_n \geq A$ où A est un réel demandé en entrée.

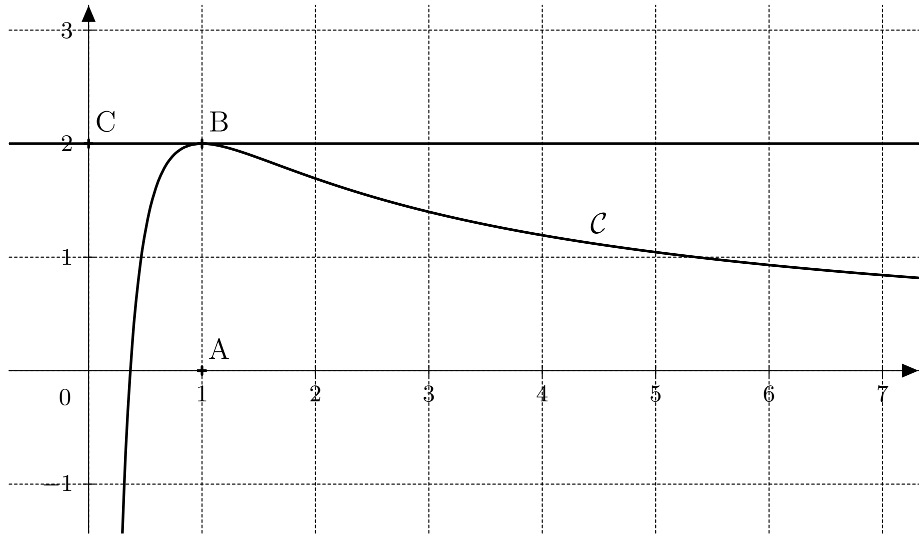
Entrée :	A un réel
Initialisation :	L prend la valeur $2\sqrt{3}$
	N prend la valeur 1
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à L la valeur $L + 2^{N+1}\sqrt{3}$
	N prend la valeur ...
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher ...

b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$.

c. En déduire la valeur affichée par l'algorithme si l'utilisateur entre $A = 10^{50}$.

Exercice 4 **5 points**

Partie A. — Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2. Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

3. En déduire les réels a et b.

Partie B. — Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{2 + 2\ln x}{x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel $x \in\,]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

2. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction g.
Ce tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ avec $\alpha < \beta$. (On ne demande pas de démontrer cette affirmation.)

4. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

5. Montrer que $2\ln(\alpha) = \alpha - 2$ et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $2\ln(\alpha)$.
On admet qu'on démontre de même que $5{,}35 \leq \beta \leq 5{,}36$ et $3{,}35 \leq 2\ln(\beta) \leq 3{,}36$.

6. Déduire des questions précédentes que $(\alpha\beta)^2 \geq 6{,}05$ et que $4\ln(\alpha)\ln(\beta) \geq -5{,}18$.

7. Les tangentes à la courbe de g aux points d'abscisses α et β sont-elles perpendiculaires ?
On rappelle que si une droite D a pour équation réduite $y = ax + b$ alors le vecteur $\vec{v}\,(1\,;a)$ est un vecteur directeur de D et le vecteur $\vec{n}\,(a\,;-1)$ est un vecteur normal à D.