# Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 15/10/2016

**EXERCICE 1 (4 points)**

**1. a.** $P(3\text{i}) = (3\text{i})^4 - 4(3\text{i})^3 + 14(3\text{i})^2 - 36(3\text{i}) + 45 = 81 + 108\text{i} - 126 - 108\text{i} + 45$ donc $\boxed{P(3\text{i}) = 0}$.

**b.** Soit $w$ un nombre complexe. Supposons que $P(w) = 0$. Alors, grâce aux propriétés de la conjugaison complexe,

$$\begin{aligned} P(\overline{w}) &= \overline{w}^4 - 4\overline{w}^3 + 14\overline{w}^2 - 36\overline{w} + 45 \\ &= \overline{w^4} - 4\overline{w^3} + 14\overline{w^2} - 36\overline{w} + 45 \\ &= \overline{w^4 - 4w^3 + 14w^2 - 36w + 45} \\ &= \overline{P(w)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(\overline{w}) = 0}$.

**c.** Il suit immédiatement des questions précédentes que $3\text{i}$ et $\overline{3\text{i}} = -3\text{i}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.

**2. a.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(z^2+9)(z^2-4z+5) = z^4-4z^3+5z^2+9z^2-36z+45 = z^4-4z^3+14z^3-36z+45 = P(z)$$

donc, $\boxed{\text{pour tout complexe } z,\ P(z) = (z^2+9)(z^2-4z+5)}$.

**b.** On déduit de la question précédente que

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Or, d'une part

$$z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 3\text{i})(z + 3\text{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 3\text{i} \text{ ou } z = -3\text{i}$$

et, d'autre part, le discriminant du trinôme $z^2-4z+5$ est $\Delta = (-4)^2-4\times1\times5 = -4 < 0$ donc l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{-(-4) - \text{i}\sqrt{4}}{2 \times 1} = 2 - \text{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + \text{i}$.

Finalement, on conclut que <u>l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ est $\{3\text{i}, -3\text{i}, 2 - \text{i}, 2 + \text{i}\}$</u>.

**EXERCICE 2 (6 points)**

**1.** VRAIE car $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \text{i}} = \dfrac{\sqrt{2} - \text{i}}{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{2} - \text{i}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}\text{i}$.

**2.** FAUSSE car si $z = \text{i}$ et $z' = 0$ alors

$$(1 + \text{i}z)(2 - \text{i}z') = (1 + \text{i}^2) \times 2 = (1 - 1) \times 2 = 0$$

donc, dans ce cas, la partie réelle est 0 alors que $2 + zz' = 2 + \text{i} \times 0 = 2 \neq 0$.

**3.** FAUSSE car si $z = \mathrm{i}$ alors

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{1+3\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}^2}{1+3\mathrm{i}} = \frac{1-1}{1+3\mathrm{i}} = 0$$

dont le conjugué est 0. Or, dans ce cas,

$$\frac{1-\mathrm{i}z}{1-3\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}^2}{1-3\mathrm{i}} = \frac{2}{1-3\mathrm{i}} \neq 0.$$

**4.** FAUSSE car si $M$ a pour affixe $z = 0$ alors $M$ n'appartient par à la droite d'équation $x = 1$ mais $z^2 + 2\overline{z} = 0^2 + 2 \times 0 = 0$ est réel.

**5.** VRAIE car si $z$ est un complexe non nul tel que $z + \dfrac{1}{z}$ est un imaginaire pur alors il existe un réel $b$ tel que $z + \dfrac{1}{z} = \mathrm{i}b$ donc $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 = (\mathrm{i}b)^2$ i.e. $z^2 + 2 \times z \times \dfrac{1}{z} + \left(\dfrac{1}{z}\right)^2 = -b^2$ soit encore $z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} = -b^2$ et ainsi $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = -b^2 - 2$ est un réel.

**6.** VRAIE car

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3 &= (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+2\mathrm{i}\sqrt{3}-3)(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\\ &= (-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = -2-2\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}\sqrt{3}-6\\ &= -8\end{aligned}$$

donc, pour tout entier naturel $n$, $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n} = \left[(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3\right]^n = (-8)^n$ est un réel.

## Exercice 2 (10 points)

**Partie A**. — On peut présenter les différentes étapes de fonctionnement de l'algorithme sous la forme du tableau suivant.

| | $k$ | $u$ |
|---|---|---|
| Initialisation | | 5 |
| Étape 1 | 1 | 1 |
| Étape 2 | 2 | $-0{,}5$ |
| Sortie | | $-0{,}5$ |

En sortie, on obtient le nombre $-0{,}5$.

**Partie B**

**1.** On peut modifier l'algorithme de la **partie A** de la façon suivante :

| | |
|---|---|
| Variables : | $k$ et $p$ sont des entiers naturels<br>$u$ est un réel |
| Entrée : | Demander la valeur de $p$ |
| Traitement : | Affecter à $u$ la valeur 5<br>Pour $k$ variant de 1 à $p$<br>  **Afficher $u$**<br>  Affecter à $u$ la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$<br>Fin de pour |
| Sortie : | Afficher $u$ |

**2.** Les premières valeurs de la suite ne permettent pas d'affirmer quoi que ce soit. En l'occurrence, la suite n'est pas décroissante car $u_4 = 0{,}5u_3 + 0{,}5 \times 3 - 1{,}5 = -0{,}375 > u_3$.

**3.** Considérons, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la proposition $P_n$ : « $u_{n+1} > u_n$ ».

On a vu à la question précédente que $u_4 = -0{,}375 > u_3 = -0{,}75$ donc $P_3$ est vraie.

Supposons que $P_k$ est vraie pour un certain entier $k \geqslant 3$. Alors, $u_{k+1} > u_k$ donc $0{,}5u_{k+1} > 0{,}5u_k$ (car $0{,}5 > 0$) et ainsi

$$\underbrace{0{,}5u_{k+1} + 0{,}5(k+1) - 1{,}5}_{u_{k+2}} > 0{,}5u_k + 0{,}5(k+1) - 1{,}5 = 0{,}5u_k + 0{,}5k - 1 > \underbrace{0{,}5u_k + 0{,}5k - 1{,}5}_{u_{k+1}}$$

car $-1 > -1{,}5$. Ainsi, $u_{k+2} > u_{k+1}$ donc $P_{k+1}$ est vraie et on a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ u_{n+1} > u_n}$.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est (strictement) croissante à partir du rang 3}}$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0{,}1u_{n+1} - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 \\
&= 0{,}1(0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5) - 0{,}1n - 0{,}1 + 0{,}5 \\
&= 0{,}05u_n + 0{,}05n - 0{,}15 - 0{,}1n + 0{,}4 \\
&= 0{,}05u_n - 0{,}05n + 0{,}25 \\
&= 0{,}5(0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5)
\end{aligned}$$

i.e. $v_{n+1} = 0{,}5v_n$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}5}$.

De plus, $v_0 = 0{,}1u_0 - 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 = 0{,}1 \times 5 + 0{,}5 = 1$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 0{,}5^n}$.

**5.** On en déduit que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{1}{0{,}1}(v_n + 0{,}1n - 0{,}5) = 10(0{,}5^n + 0{,}1n - 0{,}5)$$

soit, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5}$.

**6.** Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0{,}5^n = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 5 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.