Corrigé du devoir surveillé du 09/12/17

Exercice 1

Partie A

1. Voir le cours.
2. Notons A : « Le client gagne au grattage » et B : « Le client gagne au tirage ». D'après l'énoncé, $P(A) = 0{,}05$, $P(B) = 0{,}001$ et les évènements A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}00005$. On en déduit que la probabilité que le client gagne de l'argent à ce jeu est $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}05 + 0{,}001 - 0{,}00005$ i.e. $\boxed{P(A \cup B) = 0{,}05095}$.

Partie B

1. L'affirmation 1 est VRAIE.
   En effet, si on écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$ donc un point M d'affixe $z = z + \mathrm{i}y$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 = 4$, et ceci est l'équation du cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 2.
2. L'affirmation 2 est VRAIE.
   En effet, pour tout complexe $z \neq 0$,
   $$(E) \Leftrightarrow z^2 + 1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0.$$
   Or, le discriminant de $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc ce trinôme a deux racines complexes conjuguées :
   $$z_1 = \frac{-(-1) - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
3. L'affirmation 3 est FAUSSE.
   En effet, tirer une boule dans l'urne constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$ en prenant comme succès « obtenir un nombre supérieur ou égal à 35 ». Tirer 10 boules de l'urne avec remise revient à répéter 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées ayant un numéro supérieur ou égal à 35. Alors, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(\frac{8}{25}, 10)$. Ainsi, comme X prend des valeurs entières,
   $$P(E) = P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}187$$
4. L'affirmation 4 est FAUSSE.
   L'évènement contraire de F est $\overline{F}$: « Ne jamais obtenir 6 au cours des 5 lancers ». Par indépendance des lancers, la probabilité de $\overline{F}$ est $P(\overline{F}) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$ donc $P(F) = 1 - (\frac{5}{6})^5 = \frac{4651}{7776} \neq \frac{775}{1296}$.

Exercice 2

Partie A

1. Le discriminant de $g(x)$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64$ donc ce trinôme a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 6.$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Comme g est une fonction polynôme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{-\infty} g = +\infty}$.

Partie B

1. Pour tout réel x, $h(x)$ existe si et seulement si $g(x)$ existe et $g(x) \neq 0$. On déduit donc de la partie A que l'ensemble de définition de h est $\boxed{\mathcal{D}_h =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;6[\,\cup\,]6\,;+\infty[}$.

2. Comme $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{-\infty} g = +\infty$, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{-\infty} h = 0}$.

D'après le tableau de signe de la partie A, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = 0^-$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} h(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} h(x) = -\infty}$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x < 6}} g(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} g(x) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x < 6}} h(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} h(x) = +\infty}$.

On déduit des limites précédentes que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de h aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ et que les droites d'équations $x = -2$ et $x = 6$ sont asymptotes verticales à la courbe de h.

3. Comme l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de h, la courbe 3 ne peut pas convenir.

De plus, aux voisinages de -2 et 6, les limites à droite et à gauche sont différentes donc la courbe 2 ne peut pas convenir.

La courbe 1, en revanche, peut correspondre à celle de h.

Partie C

1. Comme f est une fonction rationnelle, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4x + 20 = 16$ et $\lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 0$. De plus, si $x > 2$, $x - 2 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty}$.

2. La fonction f est dérivable sur D car c'est une fonction rationnelle est

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \quad f'(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+20)\times 1}{(x-2)^2}\\ &= \frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-20}{(x-2)^2}\\ &= \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in D,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}}$.

3. Pour tout $x \in D$, $(x-2)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. On déduit alors des résultats de la partie A que $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]2\,;6]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [6\,;+\infty[$.

4. On déduit des questions précédentes le tableau de variation ci-dessous.

x	2		6		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

5. Dans tout ce qui suit, l'unité de longueur est le centimètre.
Notons V la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ et qui à x associe le volume du jouet.
D'après l'énoncé, BF = BL $-$ 2 = $x - 2$ et l'aire de ABCD est 20 donc le volume du pavé droit ABCDEFGH est $20(x-2)$.
Par ailleurs, l'aire de EFGH est égale à celle de ABCD donc EF $\times$ FG = 20. Or, ABEF est un carré donc EF = BF = $x - 2$. Ainsi, FG = $\frac{20}{x-2}$ et, par suite, le volume de IFGJKLMN est FG $\times$ FL $\times$ MN $= \frac{20}{x-2} \times 2 \times 8 = \frac{320}{x-2}$.
Ainsi, on en déduit que le volume du jouet est

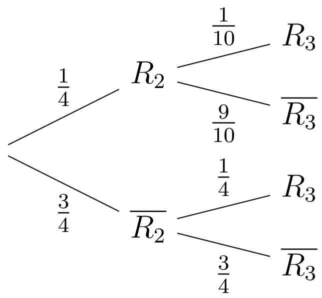
$$\begin{aligned}V(x) = 20(x-2) + \frac{320}{x-2} &= 20\left[(x-2)+\frac{16}{x-2}\right] = 20 \times \frac{(x-2)^2+16}{x-2}\\ &= 20 \times \frac{x^2-4x+4+16}{x-2} = 20 \times \frac{x^2-4x+20}{x-2}\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{V(x) = 20f(x)}$. Comme $20 > 0$, le sens de variation de V est le même que celui de f. On déduit donc de la question 4 que V est minimale pour $x = 6$ i.e. le volume du jouet est le plus petit possible si $x = 6$ et ce volume est alors $V(6) = 20f(6) = 160$ soit 160 cm^3.

Exercice 3

1. a. On suppose que le jour 1 l'employé est à l'heure donc $\boxed{p_1 = 0}$.

b. Comme $\overline{R_1}$ est un évènement certain, $p_2 = P(R_2) = P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{1}{4}$. On a donc l'arbre ci-dessous :



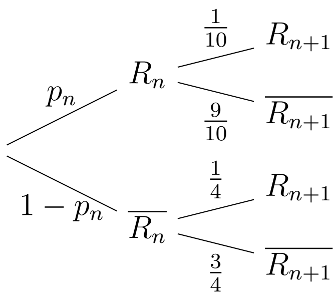
On en déduit que $p_3 = P(R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40} + \frac{3}{16}$ soit $\boxed{p_3 = \frac{17}{80}}$.

c. La probabilité que l'employé ait été en retard le jour 2 sachant qu'il est en retard le jour 3 est

$$P_{R_3}(R_2) = \frac{P(R_2 \cap R_3)}{P(R_3)} = \frac{P(R_2)P_{R_2}(R_3)}{P(R_3)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{17}{80}} = \frac{1}{40} \times \frac{80}{17}$$

i.e. $\boxed{P_{R_3}(R_2) = \frac{2}{17} \approx 0{,}12}$.

2. a.



b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'arbre ci-dessus,

$$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}p_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}p_n = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) p_n$$

soit $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{20}p_n}$.

c.

Entrée :	Saisir la valeur de N
Initialisation :	P prend la valeur 0
Traitement :	Pour K allant de 1 à $N - 1$
	│ P prend la valeur $\frac{1}{4} - \frac{3}{20}$P
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{23} = \frac{1}{4} - \frac{3}{20}p_n - \frac{5}{23} = \frac{1}{4} - \frac{5}{23} - \frac{3}{20}p_n = \frac{3}{92} - \frac{3}{20}p_n = -\frac{3}{20}\left(p_n - \frac{20}{92}\right)$$

donc $u_{n+1} = -\frac{3}{20}(p_n - \frac{5}{23}) = -\frac{3}{20}u_n$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } -\frac{3}{20}}$. De plus, son premier terme est $u_1 = p_1 - \frac{5}{23}$ soit $\boxed{u_1 = -\frac{5}{23}}$.

e. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{5}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}}$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \frac{5}{23} + u_n$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{5}{23} - \frac{5}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}}$.

f. Comme $-1 < -\frac{3}{20} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$ et donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{5}{23}}$.

Exercice 3 (spécialité)

Partie A. — Calcul des puissances d'une matrice

1. Le déterminant de P est $\det P = 1 \times 4 - 1 \times 1 = 3 \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{PDP^{-1} = A}$.

3. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Puisque $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, par hypothèse de récurrence et grâce à la question 2,

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) &= PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a ainsi démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$. Dès lors, d'après la question 3,

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{1}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{4^n} & -1 + \frac{1}{4^n} \\ 4 - \frac{4}{4^n} & -1 + \frac{4}{4^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donc $\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{4^n} & -1 + \frac{1}{4^n} \\ 4 - \frac{1}{4^{n-1}} & -1 + \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix}}$.

Partie B. — Application à l'étude d'une suite

1. Par définition, $u_2 = \frac{5}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 5 - \frac{1}{4}$ i.e. $\boxed{u_2 = \frac{19}{4}}$.

De même, $u_3 = \frac{5}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_1 = \frac{95}{16} - 1$ i.e. $\boxed{u_3 = \frac{79}{16}}$.

2.

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 1
	b prend la valeur 4
Traitement :	Saisir n
	Pour i allant de 2 de n
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur $\frac{5}{4}b - \frac{1}{4}c$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

3. a. On considère la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $C_n = A^nC_0$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $A^0 = I_2$, $A^0C_0 = I_2C_0 = C_0$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{Q}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $A^{k+1}C_0 = (AA^k)C_0 = A(A^kC_0) = AC_k$. Or, par définition de (u_n),

$$AC_k = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}u_{k+1} - \frac{1}{4}u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = C_{k+1}$$

donc $A^{k+1}C_0 = C_{k+1}$ donc $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_n = A^nC_0}$.

b. Sachant que $C_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, on déduit des questions 4 de la partie A et 3.a de la partie B que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{4^n} & -1 + \frac{1}{4^n} \\ 4 - \frac{1}{4^{n-1}} & -1 + \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 - \frac{4}{4^n} - 1 + \frac{1}{4^n} \\ 16 - \frac{4}{4^{n-1}} - 1 + \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 - \frac{3}{4^n} \\ 15 - \frac{3}{4^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{4^n} \\ 5 - \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 5 - \frac{1}{4^{n-1}}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - \frac{1}{4^{n-1}} = 5 - (\frac{1}{4})^{n-1}$. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{4})^{n-1} = 0$ donc, par différence, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5}$.

Exercice 4

1. Dans la cellule B3, on a entré $\boxed{\text{=1/(2-B2)}}$ et, dans la cellule C3, on a entré $\boxed{\text{=C2+B3}}$.

2. **a.** À partir des valeurs du tableau, on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

b. Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{n}{n+1}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $u_0 = 0 = \frac{0}{0+1}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{k+1}{2k+2-k} = \frac{k+1}{k+2}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{n+1}}$.

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$.

3. *1ère méthode.* — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_k - \frac{1}{2} = \frac{k}{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{2k-1}{2(k+1)}.$$

Or, $k \geqslant 1$ donc $2k-1 \geqslant 1$ et $2(k+1) > 0$. Ainsi, $u_k - \frac{1}{2} \geqslant 0$ donc $u_k \geqslant \frac{1}{2}$.

On a donc montré que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \geqslant \frac{1}{2}$.

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étant donné que $u_0 = 0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} = \frac{n}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant \frac{n}{2}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donc $\boxed{(S_n) \text{ diverge}}$.

2ième méthode. — Supposons, par l'absurde, que (S_n) converge vers un réel ℓ. Alors, (S_{n+1}) converge aussi vers ℓ donc, par différence, $(S_{n+1} - S_n)$ converge vers $\ell - \ell = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$. Ceci est absurde car (u_n) converge vers 1 donc (u_{n+1}) converge aussi vers 1. Ainsi, $\boxed{(S_n) \text{ diverge}}$.