Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant en détails sa réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation. Dans les questions 1, 2 et 3, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

1. On considère les droites D_1 et D_2 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 5 - 2s \\ z = s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : Les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

2. On considère les points $\mathrm{A}(1\,;1\,;0)$, $\mathrm{B}(1\,;-1\,;0)$, $\mathrm{C}(1\,;-1\,;1)$ et $\mathrm{D}(0\,;1\,;1)$.
Affirmation 2 : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

3. On considère les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$ et $\mathrm{B}(3\,;2\,;1)$ ainsi que la droite Δ dont une représentation paramétrique est

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Pour tout point $M \in \Delta$, $\mathrm{A}M = \mathrm{B}M$.

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose

$$I_a = \int_a^{2a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Affirmation 4 : La valeur de I_a est indépendante de a.

Exercice 2 (6 points)

Partie A. — On considère une fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant.

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
Variations de g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2

On sait, de plus, qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}.$$

1. À l'aide du tableau, donner les valeurs de $g(\frac{1}{2})$ et de $g(1)$.

2. À l'aide du tableau, donner $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

Partie B. — Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \ln(x) + \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x > 0$,

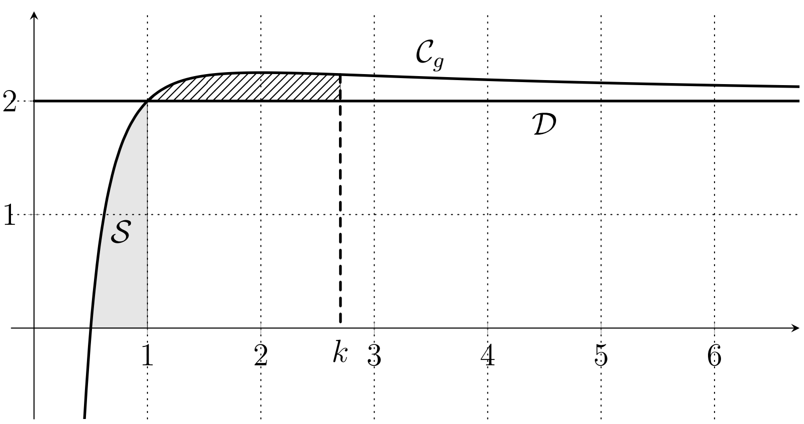
$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\left[1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right].$$

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = g(x)$.

b. En utilisant le tableau de variation de g donné dans la partie A, en déduire le tableau de variation complet de la fonction f.

Partie C. — Dans cette partie, on s'intéresse à la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g définie dans la **partie A**. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_g$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2$.



1. Sur le graphique précédent, la surface grisée $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$. Montrer que l'aire, en unité d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ est $\mathcal{A} = \ln(2)$.

2. Pour tout réel k strictement supérieur à 1, on note $\mathcal{A}_k$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_g$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = k$. Ainsi, $\mathcal{A}_k$ est l'aire, en unité d'aire, de la surface hachurée sur la figure précédente.
Existe-t-il une valeur de $k > 1$ pour laquelle $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$?

Exercice 3 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Dans tout cet exercice, on pose

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. a. Écrire le nombre j sous forme exponentielle.

b. En déduire que $-\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b. En déduire que $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

3. On note P, Q et R les points du plan d'affixes respectives 1, j et j^2.

a. Sur une figure, en prenant comme unité graphique 4 cm, placer les points P, Q et R et tracer le triangle PQR.

b. Déterminer, en justifiant sa réponse, la nature du triangle PQR.

4. Soit a, b et c trois nombres complexes différents vérifiant l'égalité

$$a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0.$$

On note A, B et C les points du plan d'affixes respectives a, b et c.

a. En utilisant la question 2.b, démontrer que $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

b. En déduire que AC = BC.

c. Déduire des questions 1.b. et 4.a. que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\,,\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier.)

Exercice 4 (5 points)

À TRAITER SUR UNE COPIE SÉPARÉE

On dispose sur une table 3 pièces de monnaie A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu se déroule en 30 parties consécutives de la manière suivante. Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face. Ensuite, à chaque partie, le joueur choisit une pièce au hasard et la retourne.

Partie A. — Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « à l'issue de n parties, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « à l'issue de n parties, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « à l'issue de n parties, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- T_n l'évènement : « à l'issue de n parties, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = p(X_n)$, $y_n = p(Y_n)$, $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

Enfin, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice ligne $U_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice U_0.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste à quatre 4 états :

E_1 : « les trois pièces sont du côté face » ;

E_2 : « exactement deux pièces sont du côté face et la troisième est du côté pile » ;

E_3 : « exactement deux pièces sont du côté pile et la troisième est du côté face » ;

E_4 : « les trois pièces sont du côté pile ».

On remarquera, notamment, que la probabilité de transition de l'état E_1 à l'état E_2 est égale à 1 puisque si toutes les pièces sont du côté face après un certain nombre de parties alors, quelle que soit la pièce qu'on retourne, on aura deux pièces du côté face et une pièce du côté pile après la partie suivante.

3. Déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.

4. a. En déduire la probabilité qu'à la fin du jeu (i.e. après 30 parties) les trois pièces soient du côté pile.

b. Donner une explication du résultat obtenu.

Partie B. — À chaque partie, si le joueur retourne la pièce A, il gagne 12 points, s'il retourne la pièce B, il perd 7 points et s'il retourne la pièce C, il perd 4 points.

On note a le nombre de fois où il a retourné la pièce A, b le nombre de fois où il a retourné la pièce B et c le nombre de fois où il a retourné la pièce C.

1. Justifier que $c = 30 - a - b$.

2. Montrer que le nombre total de points du joueur à la fin du jeu est

$$T = 16a - 3b - 120.$$

3. On considère l'équation diophantienne (E) : $16x - 3y = 120$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

a. Vérifier que $(6\,;-8)$ est une solution particulière de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. À la fin du jeu, le total des points du joueur est nul.
Déterminer a, b et c.