Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant en détails sa réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation. Dans les questions 1, 2 et 3, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. On considère les droites D_1 et D_2 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 2-s \\ y = 5-2s \\ z = s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : Les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

2. On considère les points $\mathrm{A}(1\,;1\,;0)$, $\mathrm{B}(1\,;-1\,;0)$, $\mathrm{C}(1\,;-1\,;1)$ et $\mathrm{D}(0\,;1\,;1)$.
Affirmation 2 : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

3. On considère les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$ et $\mathrm{B}(3\,;2\,;1)$ ainsi que la droite Δ dont une représentation paramétrique est

$$\Delta : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Pour tout point $M \in \Delta$, $\mathrm{A}M = \mathrm{B}M$.

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose

$$I_a = \int_a^{2a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Affirmation 4 : La valeur de I_a est indépendante de a.

Exercice 2 (6 points)

Partie A. — On considère une fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
Variations de g	$\|\|$ $-\infty$	0	2	$\frac{9}{4}$	2

On sait, de plus, qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}.$$

1. À l'aide du tableau, donner les valeurs de $g(\frac{1}{2})$ et de $g(1)$.

2. À l'aide du tableau, donner $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

Partie B. — Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \ln(x) + \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x > 0$,

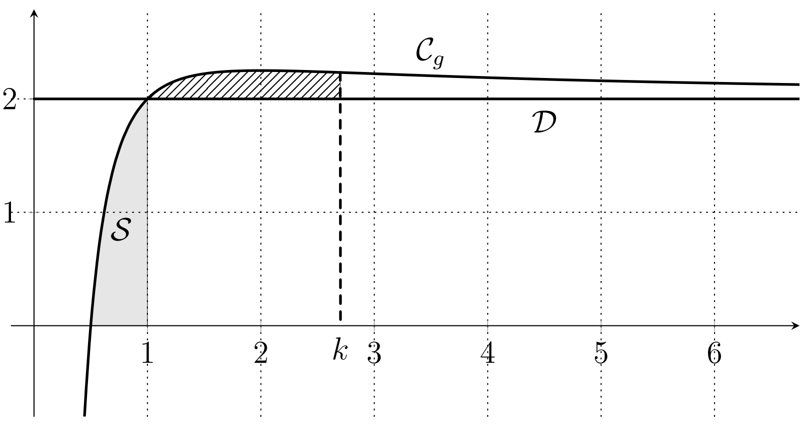
$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\left[1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right].$$

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = g(x)$.

b. En utilisant le tableau de variation de g donné dans la partie A, en déduire le tableau de variation complet de la fonction f.

Partie C. — Dans cette partie, on s'intéresse à la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g définie dans la **partie A**. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_g$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2$.



1. Sur le graphique précédent, la surface grisée $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$. Montrer que l'aire, en unité d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ est $\mathcal{A} = \ln(2)$.

2. Pour tout réel k strictement supérieur à 1, on note $\mathcal{A}_k$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_g$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = k$. Ainsi, $\mathcal{A}_k$ est l'aire, en unité d'aire, de la surface hachurée sur la figure précédente.
Existe-t-il une valeur de $k > 1$ pour laquelle $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$?

Exercice 3 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Dans tout cet exercice, on pose

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. a. Écrire le nombre j sous forme exponentielle.

b. En déduire que $-\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b. En déduire que $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

3. On note P, Q et R les points du plan d'affixes respectives 1, j et j^2.

a. Sur une figure, en prenant comme unité graphique 4 cm, placer les points P, Q et R et tracer le triangle PQR.

b. Déterminer, en justifiant sa réponse, la nature du triangle PQR.

4. Soit a, b et c trois nombres complexes différents vérifiant l'égalité

$$a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0.$$

On note A, B et C les points du plan d'affixes respectives a, b et c.

a. En utilisant la question 2.b, démontrer que $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

b. En déduire que AC = BC.

c. Déduire des questions 1.b. et 4.a. que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\,,\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier.)

Exercice 4 (5 points)

Garance et Sandro se sont spécialisés dans la vente de bouteilles de jus de fruits artisanaux, exclusivement de pomme ou de raisin. On sait que :

- 60% de leurs jus proposés à la vente sont des jus de pomme ;
- 85% de leurs jus de pomme sont bio ;
- seulement 46% de leurs jus de raisin sont bio.

Partie A. — On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits dans leur stock après une importante livraison.

On note :

O l'évènement : « la bouteille est une bouteille de jus de pomme » ;

B l'évènement : « la bouteille est une bouteille de jus bio ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité $P(B)$ de l'évènement B est égale à 0,694.

3. Calculer la probabilité que la bouteille de jus de fruits soit un jus de pomme sachant qu'il s'agit d'un jus bio. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

4. En raison d'une forte demande, Garance et Sandro souhaitent proposer davantage de jus de pomme.

Quelle proportion p de jus de pomme leur permettrait de proposer à la vente 80% de jus bio ? On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1%.

Partie B — Dans toute cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Garance et Sandro ont remarqué que 3% des bouteilles qui leur sont livrées (pomme ou raisin) ont des étiquettes mal collées.

On prélève au hasard un lot de 40 bouteilles dans leur stock. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise de 40 bouteilles.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 bouteilles, associe le nombre de bouteilles avec une étiquette mal collée.

1. Préciser, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait 5 bouteilles dans le lot avec une étiquette mal collée.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 bouteilles du lot aient une étiquette mal collée.

4. **a.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X.

b. Interpréter ce résultat par une phrase.

5. Déterminer le nombre de bouteilles de jus que l'on doit prélever dans le stock pour que la probabilité d'obtenir au moins une bouteille avec une étiquette mal collée soit supérieure à 0,9.