BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire Z sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

b. En déduire le module et un argument de Z puis une forme trigonométrique de Z.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ ainsi que le point C, milieu du segment [OB], d'affixe z_{C}.

a. Déterminer une forme exponentielle de z_{A}, z_{B} et z_{C}.

b. Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et E le point tel que DABE soit un parallélogramme.

Démontrer que $z_{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ puis que $\mathrm{OE} = \mathrm{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

4. Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 2 **4 points**

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.
Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

1. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

2. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :
- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet évènement.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement G.

c. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 3 **6 points**

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2x - 7$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.
5. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P est un réel strictement positif
Initialisation :	Donner à X la valeur 0 et à Y la valeur -5
Traitement :	Tant que $Y < 0$
	Donner à X la valeur $X + P$
	Donner à Y la valeur $g(X)$
Sortie :	Afficher $X - P$ et X

   a. On entre une valeur de P égale à 0,1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

   b. On a fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P. On a obtenu en sortie les nombres 0,94 et 0,95. Quelle valeur de P avait-on choisie en entrée ?

   c. On entre une valeur de P égale à 0,001. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

Partie B. – Etude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f.
4. **a.** Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

   b. Etudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\, \dfrac{5}{2}\right[$.

   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

Exercice 4 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 4 - \frac{6}{x+1}.$$

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. **Restitution organisée de connaissance**

   Pré-requis. — On admet que, pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

   a. On considère un réel $q > 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

   b. En déduire que si k est un réel appartenant à $]0\,;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$.

2. **a.** Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. En déduire un majorant de $\dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **a.** Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4. On se propose de retrouver le résultat de la question **3.c** par une autre méthode. On pourra, dans la suite, utiliser les résultats établis en question **2.**

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2)$$

   .

   b. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   c. En déduire que (u_n) converge vers une limite qu'on précisera.