CORRECTION DU BACCALAUREAT BLANC

Exercice 1

Partie A

1. $Z = \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}}{2-2\mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6})(2+2\mathrm{i})}{2^2+(-2)^2} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mathrm{i}+2\sqrt{6}\mathrm{i}-2\sqrt{6}}{8}$ soit $\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\mathrm{i}}$.

2. **a.** $|z_1| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, $\boxed{|z_1| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$.

   $|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, $\boxed{|z_2| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$.

   b. On déduit des questions précédentes que $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ i.e. $\boxed{|Z| = 1}$ et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi] = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$ i.e. $\boxed{\arg(Z) = \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]}$.

   On conclut qu'une forme trigonométrique de Z est $\boxed{Z = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$.

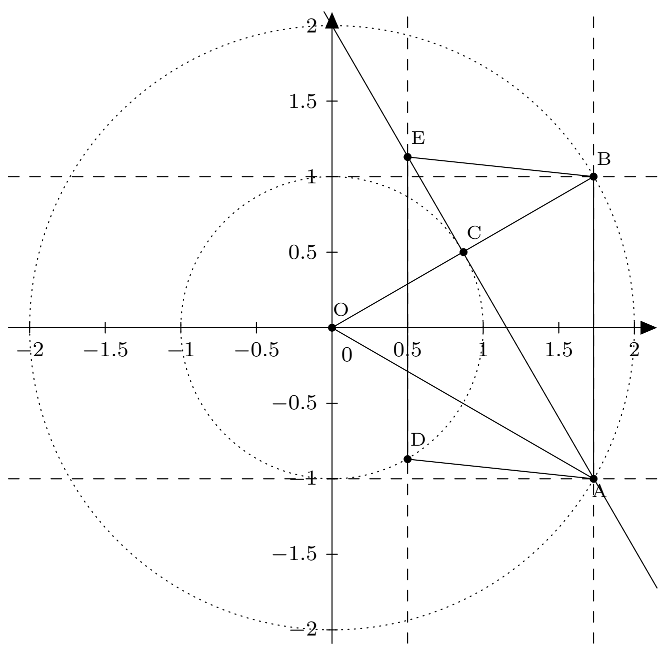
3. En identifiant partie réelle et partie imaginaire dans la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z, on en déduit que $\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

Partie B

1. Le discriminant de $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$ est $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 < 0$ donc l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{2\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ est $\{\sqrt{3} - \mathrm{i}, \sqrt{3} + \mathrm{i}\}$.

2. **a.** $|z_\mathrm{A}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$ et $z_\mathrm{A} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ soit $\boxed{z_\mathrm{A} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$. Sachant que $z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}$, on en déduit que $\boxed{z_\mathrm{B} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$. Enfin, $z_\mathrm{C} = \frac{z_\mathrm{O}+z_\mathrm{B}}{2} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2}$ soit $\boxed{z_\mathrm{C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

   b.



   c. Par définition, $\mathrm{OA} = |z_\mathrm{A}| = 2$ et $\mathrm{OB} = |z_\mathrm{B}| = 2$. Enfin, par théorème, $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |2| = 2$. Ainsi, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = 2$ donc OAB est équilatéral.

3. Comme DABE est un parallélogramme, $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ donc $z_\mathrm{E} - z_\mathrm{B} = z_\mathrm{D} - z_\mathrm{A}$ i.e.

$$z_\mathrm{E} = z_\mathrm{D} - z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} - \mathrm{i}) + \sqrt{3} + \mathrm{i} = \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}$$

i.e. $\boxed{z_\mathrm{E} = \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$. De plus,

$$\mathrm{OE} = |z_\mathrm{E}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 16 - 8\sqrt{3} + 3}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{BE} = |z_\mathrm{E} - z_\mathrm{B}| = \left|\frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - (\sqrt{3} + \mathrm{i})\right| &= \left|\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| \\ &= \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{3} + 12 + 4 - 4\sqrt{3} + 3}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\boxed{\mathrm{OE} = \mathrm{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

4. Par définition, C est le milieu de [OB] donc CO = CB. De plus, on a montré que OAB est équilatéral donc AO = AB et on a également vu que EO = EB. Ainsi, les points A, C et E sont équidistants des points O et B donc ils appartiennent à la médiatrice de [OB]. En particulier, $\boxed{\text{A, C et E sont alignés}}$.

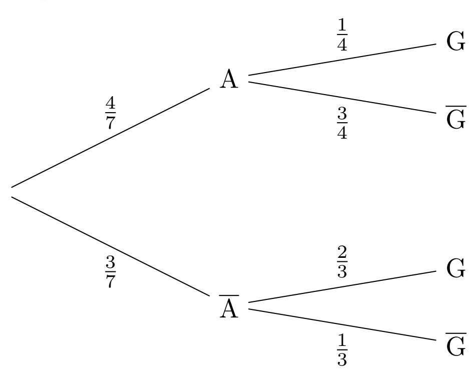
Exercice 2

1. **a.** Sachant que $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$, $p(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21}$ i.e. $\boxed{p(\mathrm{A}) = \frac{4}{7}}$. De même, $\mathrm{B} = \{3, 4, 5, 6\}$ donc $p(\mathrm{B}) = \frac{3+4+5+6}{21}$ soit $\boxed{p(\mathrm{B}) = \frac{6}{7}}$ et $\mathrm{C} = \{3, 4\}$ donc $p(\mathrm{C}) = \frac{3+4}{21}$ i.e. $\boxed{p(\mathrm{C}) = \frac{1}{3}}$.

b. La probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair est $p_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})}$. Or, $\mathrm{B} \cap \mathrm{A} = \{4, 6\}$ donc $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$. Ainsi, $p_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \frac{10}{21} \times \frac{7}{4}$ soit $\boxed{p_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \frac{5}{6}}$.

c. Etant donné que $p_\mathrm{A}(\mathrm{B}) \neq p(\mathrm{B})$, <u>les évènements A et B ne sont pas indépendants</u>. Par ailleurs, $p(\mathrm{A})p(\mathrm{C}) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = p(4) = \frac{4}{21}$ donc $p(\mathrm{A})p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et ainsi <u>les évènements A et C sont indépendants</u>.

2. **a.** On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



b. Les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{A})p_\mathrm{A}(\mathrm{G}) + p(\overline{\mathrm{A}})p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{G})$ i.e. d'après l'arbre, $p(\mathrm{G}) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}$ soit $\boxed{p(\mathrm{G}) = \frac{3}{7}}$.

c. La probabilité que le joueur ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé sachant qu'il est gagnant est $p_\mathrm{G}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{G})}{p(\mathrm{G})} = \frac{p(\mathrm{A})p_\mathrm{A}(\mathrm{G})}{p(\mathrm{G})} = \frac{\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}}$ soit $\boxed{p_\mathrm{G}(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}}$.

Exercice 3

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire g

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-7 = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-7 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $g'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2 > 0$ car la fonction exp est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $0 \in \left]\lim\limits_{-\infty} g\,;\lim\limits_{+\infty} g\right[$ donc, par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ i.e. l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α. De plus, $g(0{,}94) \approx -4.10^{-5} < 0$ et $g(0{,}941) \approx 7.10^{-3} > 0$ donc $\boxed{0,94 < \alpha < 0,941}$.

4. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en α donc, pour tout $x \in]-\infty\,;\alpha[$, $g(x) < 0$, $g(\alpha) = 0$ et, pour tout $x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

5. L'algorithme proposé augmente la valeur de X de la quantité P (partant de 0) tant que $g(X)$ est strictement négatif. Ainsi, il s'arrête lorsque $X - P$ et X fournissent un encadrement d'amplitude P de α. (C'est un algorithme de balayage.)

- **a.** Si on entre $P = 0{,}1$, les valeurs affichées en sortie sont 0,9 et 1.
- **b.** Si on a obtenu en sortie les nombres 0,94 et 0,95, on a donc un encadrement d'amplitude 0,01 de α. Dans ce cas, on a donc $P = 0{,}01$.
- **c.** Si on entre $P = 0{,}001$, on obtient en sortie les valeurs 0,940 et 0,941.

Partie B. – Etude d'une fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $f(x)$ est un produit de deux facteurs. Le premier facteur, $2x - 5$, est affine et s'annule en $\frac{5}{2}$, il est donc du signe de $a = 2 > 0$ pour tout $x \geq \frac{5}{2}$. Etudions le signe du second facteur :

$$1 - \mathrm{e}^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 \geq \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow 0 \leq x$$

(la troisième équivalence provenant de la croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$).

On peut alors dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $1-\mathrm{e}^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;0] \cup \left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[\text{ et } f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \left]0\,;\frac{5}{2}\right]}$.

2. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X=+\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}=+\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\mathrm{e}^{-x}=-\infty$ et ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$. Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x}=1$ et ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x)=2(1-\mathrm{e}^{-x})+(2x-5)(1+\mathrm{e}^{-x})=2-2\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}-5\mathrm{e}^{-x}=2+2x\mathrm{e}^{-x}-7\mathrm{e}^{-x}.$$

On constate alors que, pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^x+2x-7)=\mathrm{e}^{-x}g(x)$. Etant donné que la fonction exp est à valeurs strictement positives, on en déduit que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

Les résultats de la partie A permettent alors de dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. **a.** Par définition, $g(\alpha)=0$ i.e. $2\mathrm{e}^\alpha+2\alpha-7=0$ donc $\mathrm{e}^\alpha=-\frac{2\alpha-7}{2}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=(2\alpha-5)(1-\mathrm{e}^{-\alpha})=(2\alpha-5)\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}\right)=(2\alpha-5)\left(\frac{\mathrm{e}^\alpha-1}{\mathrm{e}^\alpha}\right)\\&=(2\alpha-5)\left(\frac{\mathrm{e}^\alpha-1}{\mathrm{e}^\alpha}\right)=(2\alpha-5)\left(\frac{-\frac{2\alpha-7}{2}-1}{-\frac{2\alpha-7}{2}}\right)=(2\alpha-5)\frac{-2\alpha+7-2}{-2\alpha+7}\\&=(2\alpha-5)\frac{-2\alpha+5}{-2\alpha+7}=(2\alpha-5)\frac{2\alpha-5}{2\alpha-7}\end{aligned}$$

soit, finalement, $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}}$.

b. La fonction h est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition. Ainsi, h est dérivable sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right[$ et, pour tout $x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right[$,

$$h'(x)=\frac{2\times2\times(2x-5)\times(2x-7)-(2x-5)^2\times2}{(2x-7)^2}=\frac{2(2x-5)[2(2x-7)-(2x-5)}{(2x-7)^2}=\frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}.$$

Pour tout $x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right[$, $2x-5<0$ et $2x-9<0$ de qui implique que $h'(x)>0$ et donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \left]-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right[}$.

On déduit alors de la partie **partie A** que $h(0{,}94)<h(\alpha)<h(0{,}941)$. Or, $h(0{,}94)\approx-1{,}901$, $h(\alpha)=f(\alpha)$ et $h(0{,}941)\approx-1{,}8996$ donc un encadrement (possible) de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} est $\boxed{-1{,}905<f(\alpha)<-1{,}895}$.

Exercice 4 (obligatoire)

1. Restitution organisée de connaissance

a. Comme $q>1$, $q-1>0$ donc, en appliquant le pré-requis avec $a=1-q$, on obtient que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q^n=(1+(q-1))^n\geq 1+n(q-1)$. Or, comme $q-1>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n(q-1)=+\infty$ et alors, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty}$.

b. Soit $k\in\,]0\,;1[$. Alors, $\frac{1}{k}>1$ donc, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^n=+\infty$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $k^n=\frac{1}{\frac{1}{k^n}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^n}$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} k^n=0}$.

2. a. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n\geq 2$ ».
Sachant que $u_0=3$, P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$.
Alors, $u_n\geq 2$ donc $u_n+1\geq 3$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{u_n+1}\leq\frac{1}{3}$ donc $\frac{6}{u_n+1}\leq 2$. On en déduit que $-\frac{6}{u_n+1}\geq -2$ et donc $u_{n+1}=4-\frac{6}{u_n+1}\geq 4-2=2$ ce qui démontre que P_{n+1} est vraie. On a ainsi prouvé par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 2}$.

b. Comme on l'a vu dans la question précédente, le fait que $u_n\geq 2$ implique que $\frac{1}{u_n+1}\leq\frac{1}{3}$ donc $\boxed{\frac{2}{u_n+1}\leq\frac{2}{3}\text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$.

3. a. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{6}{(x+1)^2}>0$ donc $\boxed{f\text{ est croissante sur }[0\,;+\infty[}$.

b. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition Q_n : « $u_{n+1}\leq u_n$ ».
$u_1=f(u_0)=4-\frac{6}{3+1}=\frac{2}{3}\leq 3=u_0$ donc Q_0 est vraie.
Supposons que Q_n est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$.
Alors, $2\leq u_{n+1}\leq u_n$ donc, comme f est croissante sur $]0\,;+\infty[$, $f(u_{n+1})\leq f(u_n)$ i.e. $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ et donc Q_{n+1} est vraie. On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leq u_n}$.

c. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc, par le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers une limite $\ell\geq 2$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ et, d'autre part, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\frac{6}{u_n+1}=4-\frac{6}{\ell+1}$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell=4-\frac{6}{\ell+1}$. Or, comme $\ell\neq -1$,

$$\ell=4-\frac{6}{\ell+1}\Leftrightarrow \ell(\ell+1)=4(\ell+1)-6\Leftrightarrow \ell^2-3\ell+2=0\Leftrightarrow(\ell-1)(\ell-2)=0\Leftrightarrow \ell=1\text{ ou }\ell=2$$

et, comme $\ell\geq 2$, on en déduit que $\boxed{\ell=2}$.

4. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1}-2=4-\frac{6}{u_n+1}-2=2-\frac{6}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-6}{u_n+1}=\frac{2u_n-4}{u_n+1}=\frac{2}{u_n+1}(u_n-2)$. Or, on a montré à la question 2 que $\frac{2}{u_n+1}\leq\frac{2}{3}$ et que $u_n\geq 2$. Ainsi, en multipliant la première inégalité par $u_n-2\geq 0$, il vient $\frac{2}{u_n+1}(u_n-2)\leq\frac{2}{3}(u_n-2)$ i.e. $\boxed{u_{n+1}-2\leq\frac{2}{3}(u_n-2)}$.

b. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition, R_n : « $u_n-2\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ».
Sachant que $u_0=3\leq 1=\left(\frac{2}{3}\right)^0$, la proposition R_0 est vraie.
Supposons que R_n soit vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$.
Alors, $u_n-2\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc, en utilisant la question a, $u_{n+1}-2\leq\frac{2}{3}(u_n-2)\leq\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
Ainsi, R_{n+1} est vraie et on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n-2\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

c. En utilisant les questions 2.a et 3.a, on peut affirmer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n-2\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Or, $\frac{2}{3}\in\,]0\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et, par le théorème d'encadrement, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-2=0$. Etant donné que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2+(u_n-2)$, il s'ensuit que (u_n) converge et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2}$.

Exercice 4 (spécialité)

Partie A. – Restitution organisée de connaissance

Supposons que $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$. Alors, par définition, n divise $b-a$ et n divise $d-c$. Par suite, n divise toute combinaison linéaire de $b-a$ et $d-c$. Or, $bd - ac = b(d-c) + c(b-a)$ donc n divise $bd - ac$ i.e. par définition, $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B. – Inverse de 23 modulo 26

1. Etant donné que $23 \times (-9) - 26 \times (-8) = -207 - (-208) = 1$, le couple $(-9\,;-8)$ est bien solution de l'équation (E).

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E). Alors, $23x - 26y = 1 = 23 \times (-9) - 26 \times (-8)$ donc $23(x+9) = 26(y+8)$ [$*$]. Ainsi, 26 divise $23(x+9)$. Or, la question précédente associée au théorème de Bézout montre que 23 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 26 divise $x+9$. Il existe donc un entier k tel que $x + 9 = 26k$ i.e. $x = -9 + 26k$. Alors, en substituant dans [$*$], il vient $23 \times 26k = 26(y+8)$ i.e. $y = -8 + 23k$. Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme $(-9+26k\,;-8+23k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $23(-9+26k) - 26(-8+23k) = 1$ donc <u>les solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(-9+26k\,;-8+23k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$</u>.

3. Si a est un entier tel que $23a \equiv 1 \pmod{26}$ alors il existe un entier m tel que $23a = 1 + 26m$ i.e. $23a - 26m = 1$. Ainsi, le couple $(a\,;m)$ est solution de (E). Il s'ensuit qu'il existe un entier k tel que $a = -9 + 26k$. La condition $0 \leqslant a \leqslant 25$ impose que $k = 1$ et donc $a = 17$. Réciproquement, on a bien $23 \times 17 = 391 = 15 \times 26 + 1 \equiv 1 \pmod{26}$. Ainsi, $\boxed{a = 17}$.

Partie C. – Chiffrement de Hill

1. Le couple associé à ST est $(18\,;19)$. Or, $11 \times 18 + 3 \times 19 = 255 = 21 + 9 \times 26$ et $7 \times 18 + 7 \times 19 = 202 = 20 + 9 \times 26$ donc le codage donne le couple $(21\,;20)$ et le code pour ST et donc VU.

2. **a.** Soit $(x_1\,;x_2)$ un couple vérifiant les équations du système (S_1). Alors, $4y_1 + 23y_2 = 4(11x_1 + 3x_2) + 23(7x_1 + 4x_2) = 205x_1 + 104x_2$. Or, $205 = 23 + 7 \times 26 \equiv 23 \pmod{26}$ et $104 = 4 \times 26 \equiv 0 \pmod{26}$ donc, d'après la partie A, $4y_1 + 23y_2 \equiv 23x_1 + 0x_2 \pmod{26}$ soit $4y_1 + 23y_2 \equiv 23x_1 \pmod{26}$. La relation de congruence étant symétrique, on a donc également $23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26}$.

De même, $19y_1 + 11y_2 = 19(11x_1 + 3x_2) + 11(7x_1 + 4x_2) = 286x_1 + 101x_2 = (11 \times 26)x_1 + (23 + 3 \times 26)x_2 \equiv 23x_2 \pmod{26}$ donc $23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } (x_1\,;x_2) \text{ vérifie } (S_1) \text{ alors il vérifie } (S_2)}$.

b. D'après la partie B, on sait que $17 \times 23 \equiv 1 \pmod{26}$. Dès lors, si $(x_1\,;x_2)$ est un couple les équations du système (S_2) alors, en multipliant ces deux équations par 17, il vient $x_1 \equiv (17 \times 4)y_1 + (17 \times 23)y_2 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv (17 \times 19)x_1 + (17 \times 11)x_2 \pmod{26}$. Or, $17 \times 4 = 16 + 2 \times 26$, $17 \times 19 = 11 + 12 \times 26$ et $17 \times 11 = 5 + 7 \times 26$ donc $x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si un couple } (x_1\,;x_2) \text{ vérifie } (S_2) \text{ alors il vérifie } (S_3)}$.

c. Soit $(x_1\,;x_2)$ un couple qui vérifie les équations du système (S_3) alors

$$\begin{aligned} 11x_1 + 3x_2 &\equiv 11(16y_1 + y_2) + 3(11y_1 + 5y_2) \pmod{26} \equiv (11 \times 19)y_1 + 26y_2 \pmod{26} \\ &\equiv (1 + 8 \times 26)y_1 \pmod{26} \equiv y_1 \pmod{26} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &\equiv 7(16y_1 + y_2) + 4(11y_1 + 5y_2) \pmod{26} \equiv 156y_1 + 27y_2 \pmod{26} \\ &\equiv 6 \times 26y_1 + (1 + 26)y_2 \pmod{26} \equiv y_2 \pmod{26} \end{aligned}$$

donc, par symétrie de la congruence, $(x_1\,;x_2)$ vérifie (S_1).

Ainsi, $\boxed{\text{si un couple } (x_1\,;x_2) \text{ vérifie } (S_3) \text{ alors il vérifie } (S_1)}$.

d. Les questions précédentes montre que, pour un couple $(y_1\,;y_2)$ donné, $(x_1\,;x_2)$ est solution de (S_1) si et seulement si $(x_1\,;x_2)$ est solution de (S_3).

Dès lors, si le code est YJ alors $(y_1\,;y_2) = (24\,;9)$ donc $x_1 \equiv 16 \times 24 + 9 \pmod{26} \equiv 393 \pmod{26} \equiv 3 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv 11 \times 24 + 5 \times 9 \pmod{26} \equiv 309 \pmod{26} \equiv 23 \pmod{26}$ donc le mot décodé est DX.