BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner une forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n entier naturel
	R réel
	P réel strictement positif
Entrée :	Demander la valeur de P
Traitement :	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

a. Compléter le tableau de l'annexe (page 5) en faisant fonctionner l'algorithme pour $P = 0{,}5$.

b. Quel est le rôle de cet algorithme concernant la suite (r_n) ?

4. **a.** Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ et en déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{O}A_n})$.

c. Compléter la figure donnée en annexe (page 5), à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les deux suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$

$$y_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. **a.** En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le P.G.C.D. de x_8 et x_9.

b. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer que x_{2014} et x_{2015} sont premiers entre eux.

c. Les nombres x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.
En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

EXERCICE 3 **5 points**

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal. Ces deux courbes sont représentées sur l'annexe (page 5).

1. Démontrer que le point A de coordonnées $(0\,;1)$ est commun aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ puis démontrer qu'en ce point, les deux courbes ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. <u>Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ</u>
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel non nul x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. <u>Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$</u>

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. <u>Une propriété de la courbe $\mathcal{C}_f$</u>
Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}_f$. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M et D la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M. On appelle respectivement N et P les points d'intersection de l'axe des abscisses avec les droites T et D.
Démontrer que $NP = 1$.

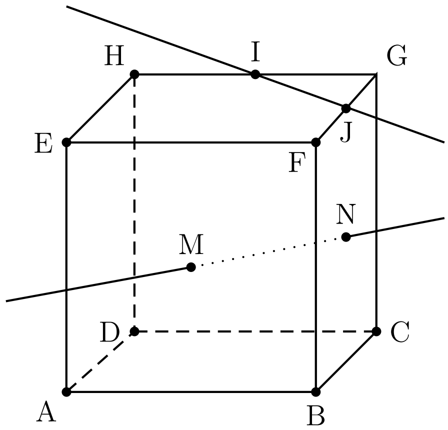
Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

1. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

a) perpendiculaires b) sécantes et non perpendiculaires c) orthogonales d) parallèles

2. On note D l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On considère la fonction f définie sur D par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Alors, f est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ b) $\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ c) $-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ d) $\dfrac{-\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(2x)}{3x}$ est égale à :

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $\dfrac{2}{3}$

Dans les questions 4 et 5, on note u la fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = 2x^2 - 5x + 4.$$

4. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+4}}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(4x-5)$ c) $\sqrt{4x-5}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2-5x+4}}$

5. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(u(x))^3}$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{3(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^2}$ b) $\dfrac{15-12x}{(2x^2-5x+4)^4}$ c) $\dfrac{1}{3(2x^2-5x+4)^2}$ d) $\dfrac{-(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^6}$

NOM : .... Prénom : ....

ANNEXE
A rendre avec sa copie

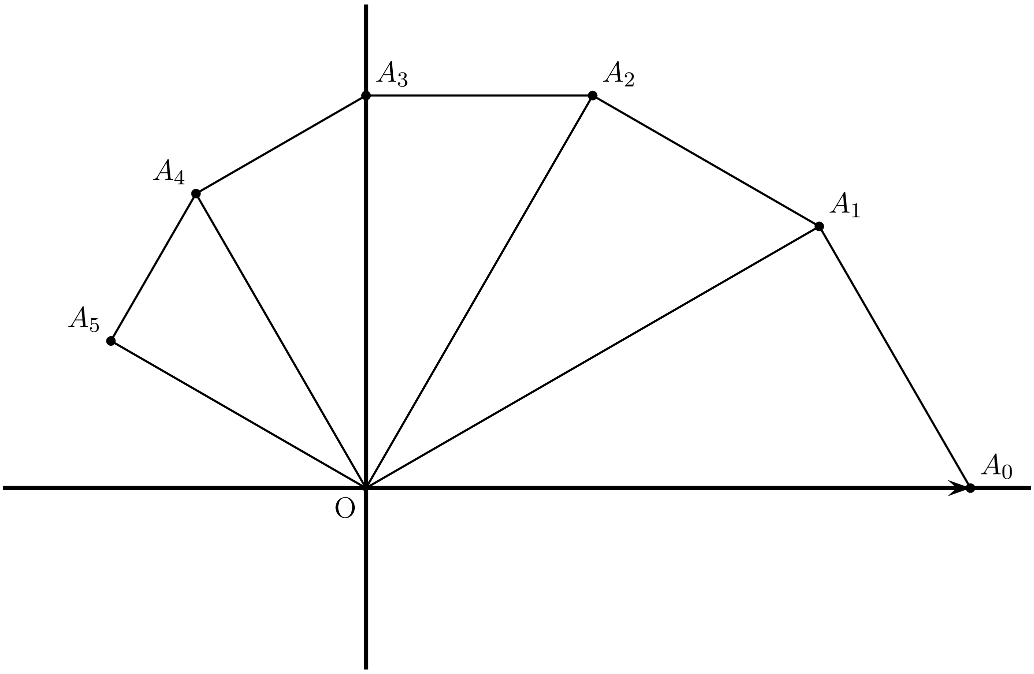
Exercice 1

Question 3.a. (Remarque : toutes les colonnes du tableau suivant ne sont pas forcément nécessaires.)

	Initialisation	Etape 1	Etape 2						
R	1								
n	0								
$R > P$	VRAIE								

Valeur affichée en sortie : ....

Question 4.c.



Exercice 3