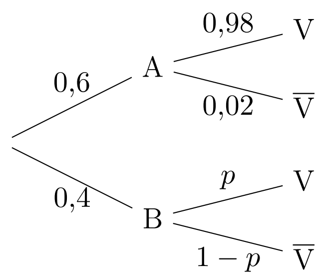
Corrigé du baccaleauréat blanc 2017

Exercice 1 — 5 points

Partie A

1. Même si ce n'est pas demandé, on peut faire un arbre pour représenter la situation, en appelant p la probabilité de V sachant B.



On cherche $P(\text{V}\cap\text{A})$. Or,

$$P(\text{V}\cap\text{A}) = P(\text{A})P_{\text{A}}(V) = 0{,}6\times 0{,}98$$

donc $\boxed{P(\text{V}\cap\text{A}) = 0{,}588}$.

2. a. D'après la formule des probabilité totales, $P(\text{V}) = P(\text{A}\cap\text{V}) + P(\text{B}\cap\text{V})$ donc $P(\text{B}\cap\text{V}) = P(\text{B}\cap\text{V}) - P(\text{A}\cap\text{V}) = 0{,}96 - 0{,}588$ soit $\boxed{P(\text{B}\cap\text{V}) = 0{,}372}$.

b. La probabilité que la figurine choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine 2 est

$$P_{\text{B}}(\text{V}) = \frac{P(\text{B}\cap\text{V})}{P(\text{B})} = \frac{0{,}372}{1-P(\text{A})} = \frac{0{,}372}{0{,}4}$$

donc $\boxed{P_{\text{B}}(\text{V}) = 0{,}93}$.

3. Sur l'arbre $p = P_{\text{B}}(\text{V}) = 0{,}93$ donc $P_{\text{B}}(\overline{\text{V}}) = 1-p = 0{,}07$. Dès lors, la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 2 sachant qu'elle n'est pas vendable est

$$P_{\overline{\text{V}}}(\text{B}) = \frac{P(\text{B}\cap\overline{\text{V}})}{P(\overline{\text{V}})} = \frac{P(\text{B})P_{\text{B}}(\overline{\text{V}})}{1-P(\text{V})} = \frac{0{,}4\times 0{,}07}{1-0{,}96} = 0{,}7$$

donc $\boxed{\text{le technicien a raison}}$.

Partie B

1. a. Prélever au hasard une figure constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{10}$ (puisqu'il y a 10 couleurs équiprobables) en prenant comme succès S : « obtenir une figurine noire ». Prélever 20 figurines dans la production en assimilant cela à des tirages avec remise revient à répéter 20 fois de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli : cela constitue un schéma de Bernoulli. On en déduit que la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \dfrac{1}{10}\right)$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{P(X=5)\approx 0{,}032}$.

c. La probabilité que le sachet ne contiennent aucun figurine noire est $P(X=0) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$ donc la probabilité que le sachet contienne au moins une figurine de couleur noire est $P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$ soit $\boxed{P(X\geqslant 1)\approx 0{,}878}$.

2. Supposons que les sachets contiennent n figurines où $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité qu'un sachet contienne au moins une figurine noire est, comme précédemment, $1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$. On cherche donc le plus petit entier n tel que $1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^n \geqslant 0{,}99$ ce qui équivaut à $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n \leqslant 1 - 0{,}99 = 0{,}01$. En programmant sur la calculatrice la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$, on trouve que $u_{43} \approx 0{,}0108 > 0{,}01$ et $u_{44} \approx 0{,}0097 < 0{,}01$. Ainsi, l'entier n cherché est $\boxed{n = 44}$.

Exercice 2 — 5 points

Partie A. — Étude d'une fonction auxiliaire g

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 5 = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{-\infty} g = -\infty}$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 5 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = +\infty}$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2$. Or, pour tout$x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $g'(x) > 0$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.
On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variation de g	$-\infty \nearrow +\infty$

3. La fonction g est continue car dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $0 \in \left]\lim\limits_{-\infty} g\,;\lim\limits_{+\infty} g\right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $g(0{,}627) \approx -0{,}002 < 0$ et $g(0{,}628) \approx 0{,}004 > 0$, on a bien $\boxed{0{,}627 < \alpha < 0{,}628}$.

4. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(\alpha) = 0$, $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\alpha]$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [\alpha\,;+\infty[$.

Partie B. — Étude d'une fonction f

1. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-3 = -\infty$ et, d'autre part, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = -\infty$. Par produit, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = +\infty}$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3 = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$. Par produit, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit, somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1 - \mathrm{e}^{-x}) + (2x-3)(-(-\mathrm{e}^{-x})) = 2 - 2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2 + (2x-5)\mathrm{e}^{-x} = 2 + \frac{2x-5}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^x + 2x - 5}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

donc on a bien, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}}$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. On déduit donc de la question **A.4.** que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;\alpha]$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [\alpha\,;+\infty[$. On conclut donc que la fonction $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;\alpha] \text{ et croissante sur } [\alpha\,;+\infty[}$.

3. Par définition, $g(\alpha) = 0$ donc $2\mathrm{e}^\alpha + 2\alpha - 5 = 0$ i.e. $\mathrm{e}^\alpha = -\dfrac{2\alpha - 5}{2}$ donc $\mathrm{e}^{-\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\alpha} = -\dfrac{2}{2\alpha - 5}$. Par suite,

$$f(\alpha) = (2\alpha - 3)\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) = (2\alpha - 3)\left(1 + \frac{2}{2\alpha - 5}\right) = (2\alpha - 3)\left(\frac{2\alpha - 5 + 2}{2\alpha - 5}\right) = (2\alpha - 3) \times \frac{2\alpha - 3}{2\alpha - 5}$$

donc $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 3)^2}{2\alpha - 5}}$.

4. D'après la question précédente, $f(\alpha) = h(\alpha)$. Or, on a vu dans la question **A.3.** que $0{,}627 < \alpha < 0{,}628$ donc, comme tous ces nombres sont inférieurs à $\dfrac{3}{2}$, par croissante de la fonction h sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$, $h(0{,}627) \leqslant h(\alpha) \leqslant h(0{,}628)$. Or, $h(0{,}627) \approx -0{,}814$ et $h(0{,}628) \approx -0{,}812$ donc $-0{,}82 < h(\alpha) < -0{,}81$ i.e. $\boxed{-0{,}82 < f(\alpha) < -0{,}81}$.

EXERCICE 3 — 5 points

1. FAUSSE

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\sin(2x)}{x}$. Or, en posant $X = 2x$ alors $\dfrac{\sin(2x)}{x} = \dfrac{\sin(X)}{\frac{X}{2}} = 2\dfrac{\sin X}{X}$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$ et, par théorème, $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$ et donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.

2. VRAIE

Les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par produit et composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2\cos(2x) + 2x \times 2 \times (-\sin(2x)) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x)$$

et

$$h'(x) = 2\cos(2x)$$

Dès lors, $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) - 2\pi\sin(\pi) = -2$ et $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) = -2$. Ainsi, $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc les deux tangentes évoquées sont bien parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur.

3. VRAIE

L'équation $-\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ équivaut à $\cos(x)\,[1 - \cos(x)] = 0$ ce qui équivaut à $\cos(x) = 0$ ou $1 - \cos(x) = 0$. Or, sur $[0\,;\pi]$, l'équation $\cos(x) = 0$ a une unique solution qui est $\dfrac{\pi}{2}$ et l'équation $1 - \cos(x) = 0$ i.e. $\cos(x) = 1$ a une unique solution qui est 0. On conclut donc que sur $[0\,;\pi]$, l'équation $-\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

4. VRAIE

Les droites (AC) et (BD) sont les diagonales du carré ABCD donc elles sont perpendiculaires. Par ailleurs, la droite (DH) est perpendiculaire aux deux droites (DA) et (DC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABCD) donc (DH) est orthogonale à ce plan. Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier (DH) est orthogonale à (AC). Ainsi, (AC) est orthogonale à (BD) et à (DH) qui sont deux droites sécantes du plan (BDH) donc (AC) est orthgonale au plan (BDH).

5. VRAIE

Soit z un complexe différent de $-\mathrm{i}$. On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ sous forme algébrique. Alors,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}(y+1)} = \frac{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}(y+1))}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2-\mathrm{i}x(y+1)+\mathrm{i}yx+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+y+\mathrm{i}(-xy-x+yx)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} + \mathrm{i}\frac{-x}{x^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+y=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)^2+\left(y-(-\frac{1}{2})\right)^2 = (\frac{1}{2})^2 \\ (x\,;y) \neq (0\,;-1) \end{cases}.$$

Ainsi, $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\Omega\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de A.

Exercice 4 — 5 points

1. $u_1 = \dfrac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

2.

Traitement :	Pour K variant de 1 à N
	Affecter à U la valeur $\dfrac{\mathrm{U}}{\sqrt{1+\mathrm{U}^2}}$
	Fin de Pour
	Affecter à T la valeur $\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{N}}$

3. a. La fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$. On aboutit donc au tableau suivant.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$0 \nearrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. **a.** Soit la proposition P_n : « $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a bien $0 < u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $0 < u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$ donc, comme la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, $f(0) < f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$ i.e. $0 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$, on a également $0 < u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

b. On déduit de la question précédente que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1+u_n^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1+u_n^2-1}{u_n^2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 1}$. Son premier terme est $v_0 = \dfrac{1}{u_0^2} = \dfrac{1}{1^2}$ soit $\boxed{v_0 = 1}$.

b. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 1 = n + 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$ donc $u_n^2 = \dfrac{1}{v_n}$ et, comme u_n est positif d'après la question **4.a.**, $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{v_n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$. En passant à l'inverse, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et, par continuité de la racine carrée en 1, $\lim\limits_{X\to 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1}$.

Exercice 4 (spécialité) — 5 points

1. $d_0 = \text{PGCD}(u_0, v_0) = \text{PGCD}(1, 0) = 1$ car le seul diviseur positif de 1 est 1. Ainsi, $\boxed{d_0 = 1}$.

2.

Traitement :	Pour K variant de 1 à N Affecter à W la valeur **U** Affecter à U la valeur 2W+V Affecter à V la valeur **3W+4V** Fin de Pour

3. Les divisions successives sont

$$\begin{aligned} 2\,343 &= 2\times 782+779 \\ 782 &= 1\times 779+3 \\ 779 &= 259\times 3+2 \\ 3 &= 1\times 2+\boxed{1} \end{aligned}$$

donc, d'après l'algorithme d'Euclide, $\boxed{d_5 = 1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d_n divise u_n et v_n donc d_n divise toutes combinaisons linéaires de u_n et v_n. En particulier, d_n divise $2u_n+v_n$ et $3u_n+4v_n$ i.e. d_n divise u_{n+1} et v_{n+1}. Par propriété, on en déduit que d_n divise $\text{PGCD}(u_{n+1}, v_{n+1})$ i.e. $\boxed{d_n \text{ divise } d_{n+1}}$.

5. a. Soit la proposition P_n : « $3u_n - v_n = 3$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $3u_0 - v_0 = 3\times 1 - 0 = 3$, P_0 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $3u_{k+1} - v_{k+1} = 3(2u_k + v_k) - (3u_k + 4v_k) = 3u_k - v_k = 3$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 3u_n - v_n = 3}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d_n divise u_n et d_n divise v_n donc d_n divise toute combinaison linéaire de u_n et v_n. En particulier, d_n divise $3u_n - v_n$ i.e. d_n divise 3. Comme $d_n > 0$, on en déduit que $\boxed{d_n \in \{1,3\}}$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + v_n \\ 3u_n + 4v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$ en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$.

b. Le déterminant de A est $\det A = 2\times 4 - 3\times 1 = 5 \neq 0$ donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $X_{n+1} = AX_n$ donc, comme A est inversible, $X_n = A^{-1}X_{n+1}$. Ainsi,

$$X_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4u_{n+1} - v_{n+1} \\ -3u_{n+1} + 2v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $u_n = \dfrac{1}{5}(4u_{n+1} - v_{n+1})$ et $v_n = \dfrac{1}{5}(-3u_{n+1} + 2v_{n+1})$. On en déduit que

$$\boxed{\begin{cases} 5u_n = 4u_{n+1} - v_{n+1} \\ 5v_n = -3u_{n+1} + 2v_{n+1} \end{cases}}$$

.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d_{n+1} divise u_{n+1} et v_{n+1} donc d_{n+1} divise toute combinaison linéaire de u_{n+1} et v_{n+1}. En particulier, d_{n+1} divise $4u_{n+1} - v_{n+1}$ et $-3u_{n+1} + 2v_{n+1}$ i.e. d_{n+1} divise $5u_n$ et $5v_n$. Par propriété, on en déduit que d_{n+1} divise $\text{PGCD}(5u_n, 5v_n) = 5\text{PGCD}(u_n, v_n) = 5d_n$. De plus, d'après la question **5.b.**, $d_{n+1} \in \{1, 3\}$ donc d_{n+1} est premier avec 5. D'après le théorème de Gauss, on conclut que $\boxed{d_{n+1} \text{ divise } d_n}$.

7. On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n divise d_{n+1} et d_{n+1} divise d_n donc, comme $d_n > 0$ et $d_{n+1} > 0$, on conclut que $d_n = d_{n+1}$. Ainsi, la suite (d_n) est constante. Or, $d_0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$. On a donc démontré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ sont premiers entre eux}}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il découle de la question **5.a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3(u_n - 1)$ donc, comme $u_n - 1$ est entier, 3 divise v_n. Or, u_n et v_n sont premiers entre eux donc ils n'ont pas de diviseurs communs positifs autre 1. Ainsi, 3 ne divise pas u_n.

On conclut qu'$\underline{\text{il n'existe pas d'entier } n \text{ tel que } u_n \text{ soit un multiple de 3}}$.