BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise produit des figurines en plastique. Pour cela, elle utilise deux machines de production : la machine 1 et la machine 2.

Partie A. — Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96% de la production mensuelle peut être vendue car elle ne présente aucun défaut.
- La machine 1 fournit 60% de la production.
- Parmi les figurines provenant de la machine 1, 98% sont vendables, c'est-à-dire sans défaut.

On choisit une figurine au hasard dans la production mensuelle et on définit les évènements suivants :
A : « la figurine a été fabriquée par la machine 1 » ;
B : « la figurine a été fabriquée par la machine 2 » ;
V : « la figurine est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la figurine choisie soit vendable et qu'elle provienne de la machine 1.

2. a. Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$.

b. En déduire la probabilité que la figurine choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine 2.

3. Un technicien affirme que 70% des figurines non vendables proviennent de la machine 2.
A-t-il raison ? (On justifiera sa réponse à l'aide d'un calcul de probabilité.)

Partie B. — Les figurines vendables sont ensuite colorées de manière aléatoire grâce à un processus qui permet d'obtenir 10 teintes différentes, dont la couleur noire, de manière aléatoire et équiprobable. Après avoir été mélangées, les figurines sont conditionnées dans des sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de figurines dans la production.

Julien collectionne ces figurines et s'intéresse particulièrement à celles de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont composés de 20 figurines. On choisit au hasard un sachet de figurines.

a. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de figurines noires contenues dans un sachet. Déterminer la loi suivie par X en précisant ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 5 figurines noires ? (On donnera une résultat arrondi à 10^{-3} près.)

c. Quelle est la probabilité que le sachet contienne au moins une figurine de couleur noire ? (On donnera une résultat arrondi à 10^{-3} près.)

2. Julien se pose la question suivante : quel doit être le nombre minimal de figurines par sachet afin que la probabilité que le sachet contienne au moins une figurine noire soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Déterminer, en justifiant précisément, la réponse à la question de Julien.

Exercice 2 — 5 points

Partie A. — Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2x - 5$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0{,}627 < \alpha < 0{,}628$.
4. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ en fonction x.

Partie B. — Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)(1 - \mathrm{e}^{-x})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{x}}$ où g est la fonction définie dans la partie A.

   En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 3)^2}{2\alpha - 5}$.
4. On admet que la fonction h définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$ par $h(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{2x-5}$ est strictement croissante.

   Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 3 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

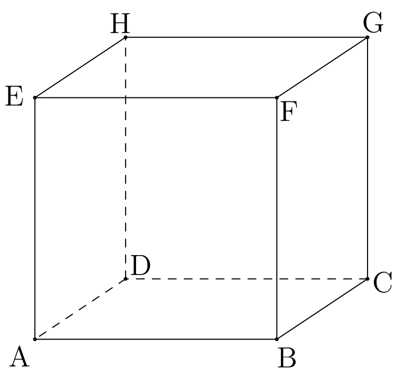
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(2x)$.

   Affirmation 1 : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.
2. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(2x)$. On note respectivement $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives de f et g dans un repère du plan.

   Affirmation 2 : les tangentes à $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ aux points d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ sont parallèles.
3. Affirmation 3 : l'équation $-\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0\,;\pi]$.
4. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

   Affirmation 4 : la droite (AC) est perpendiculaire au plan (BDH).
5. Dans le plan complexe, on note A le point d'affixe $-\mathrm{i}$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe $z \neq -\mathrm{i}$ tels que $Z = \dfrac{z}{z + \mathrm{i}}$ soit imaginaire pur.

   Affirmation 5 : l'ensemble $\mathscr{E}$ est un cercle privé du point A.



Exercice 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

On appelle, de plus, (t_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $t_n = u_n\sqrt{n}$.

1. Calculer la valeur exacte de u_1.

2. Recopier et compléter la partie **Traitement** de l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie les valeurs de u_N et t_N pour un entier naturel N saisi en entrée.

Variables :	N est un entier naturel
	U et T sont des réels
Initialisation :	Saisir la valeur de N
	Affecter à U la valeur 1
Traitement :	Pour K variant de 1 à N
	Affecter à U la valeur ...
	Fin de Pour
	Affecter à T la valeur ...
Sortie :	Afficher U et T

3. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ définie sur $[0\,;1]$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

4. a. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (On ne demande pas, dans cette question, de déterminer sa limite.)

5. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c. Déterminer les limites des suites (u_n) et (t_n).