Corrigé du baccalauréat blanc 2018

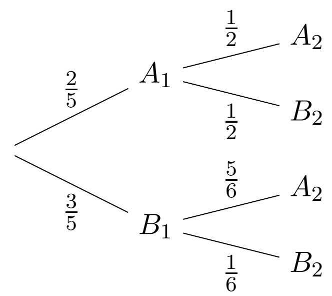
Exercice 1

Partie A

1. **a.** Sur les 20 personnes, 8 vont voir le film A le premier samedi donc, par équiprobabilité, $P(A_1) = \frac{8}{20}$ soit $\boxed{P(A_1) = \frac{2}{5}}$.

   b. Sur les 8 personnes ayant vu le film A le premier samedi, 4 vont le revoir le second samedi donc, par équiprobabilité, $P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8}$ soit $\boxed{P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{2}}$.

   c.



   d. La probabilité que la personne ait vu le film A le premier samedi et le film B le second samedi est $P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$ soit $\boxed{P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}}$.

   e. Les évènements A_1 et B_1 formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{6}$$

   i.e. $\boxed{P(A_2) = \frac{7}{10}}$.

   f. La probabilité que la personne ait vu le film A le premier samedi sachant qu'elle a vu le film B le second samedi est

$$P_{B_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B_2)}{1 - P(A_2)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{10}}$$

   i.e. $\boxed{P_{B_2}(A_1) = \frac{2}{3}}$.

Partie B

1. Choisir un client au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}34$ en prenant comme succès « la personne possède une carte d'abonnement ». Choisir 10 clients au hasard en assimilant ce choix à un tirage avec remise revient à répéter 10 fois de façon identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli : cela constitue un schéma de Bernoulli. Dès lors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}34)$.
2. À l'aide de la calculatrice, on trouve que la probabilité qu'exactement la moitié des 10 clients possèdent la carte d'abonnement est $\boxed{P(X = 5) \approx 0{,}143}$.
3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que la probabilité que plus de la moitié des 10 clients possèdent la carte d'abonnement est $\boxed{P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}084}$.
   Remarque : on peut comprendre la formule « plus de la moitié » au sens large et, dans ce cas, on trouve $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}227$.

Exercice 2

Partie A. — Étude d'un cas particulier

1. La fonction C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par composée, différence et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$C'(t) = 13\left(-\left(-\frac{7}{90}\mathrm{e}^{-\frac{7}{90}t}\right)\right) = \frac{91}{90}\mathrm{e}^{-\frac{7}{90}t}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$, $C'(t) > 0$ donc $\boxed{C \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

2. D'une part, $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{7}{90}t = -\infty$ et, d'autre part, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{7}{90}t} = 0$. Par différence et produit, il s'ensuit que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 13$. Ainsi, le plateau vaut $13 < 14$ donc $\boxed{\text{le traitement n'est pas efficace}}$.

Partie B. — Étude de fonctions

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par composée, différence et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 110\left[-\frac{1}{x^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}\right)+\frac{1}{x}\left(-\left(-\frac{1}{15}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}\right)\right] \\ &= \frac{110}{x^2}\left(-1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}+\frac{x}{15}\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de }]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{110g(x)}{x^2}}$.

2. D'après le tableau de variation de g, g est strictement négative sur $]0\,;+\infty[$. De plus, $110 > 0$ et, pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;+\infty[}$.

3. La fonction f est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc également sur $[1\,;20]$. De plus, $f(1) \approx 7{,}1 > 6{,}2$ et $f(20) \approx 4{,}05 < 6{,}2$ donc $6{,}2 \in [f(20)\,;f(1)]$. On déduit donc du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 6{,}2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;20]$. Notons cette solution α.

Comme f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tout $x \in\ ]0\,;\alpha[$, $f(x) > f(\alpha)$ i.e. $f(x) > 6{,}2$ et, pour tout $x \in\ ]\alpha\,;+\infty[$, $f(x) < f(\alpha)$ i.e. $f(x) < 6{,}2$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, si $x \neq \alpha$, $f(x) \neq 6{,}2$ ce qui prouve que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 6{,}2$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve que $\boxed{\alpha \approx 5{,}2}$.

Partie C. — Détermination d'un traitement adéquat

1. a. La concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion est

$$C(6) = \frac{110}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{90}\times 6}\right) = \frac{110}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{15}}\right).$$

Autrement dit, $\boxed{C(6) = f(a)}$ où f est la fonction définie dans la partie B.

b. Le nombre a est tel que $C(6) = 6{,}2$ i.e. tel que $f(a) = 6{,}2$. On déduit des résultats de la partie B que $a = \alpha$ donc $a \approx 5{,}2$. Ainsi, la clairance de ce patient est environ 5,2 litres par heure.

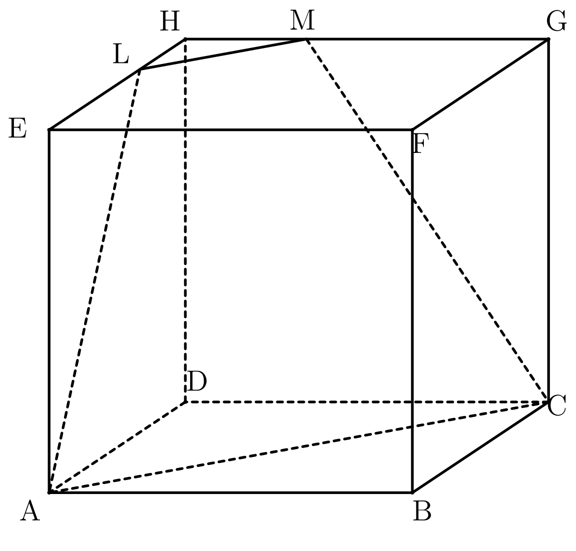
2. Comme $a > 0$, on a, d'une part, $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{a}{90}t = -\infty$ et, d'autre part, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{a}{90}t} = 0$. Par différence et produit, il s'ensuit que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \frac{d}{a}$. On cherche d tel que $\frac{d}{a} = 14$ donc $d = 14a$ et sachant que $a \approx 5{,}2$, on conclut que $d \approx 73$. Ainsi, le débit de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement est environ 73 micromoles par heure.

Exercice 3

1. **L'affirmation 1 est FAUSSE.**
On a
$$z_{\overrightarrow{\text{AB}}} = z_{\text{B}} - z_{\text{A}} = 1 + \text{i} - (\sqrt{2} + 3\text{i}) = 1 - \sqrt{2} - 2\text{i}$$
et
$$z_{\overrightarrow{\text{AC}}} = z_{\text{C}} - z_{\text{A}} = -4\text{i} - (\sqrt{2} + 3\text{i}) = -\sqrt{2} - 7\text{i}$$
donc
$$\frac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}} = \frac{-\sqrt{2} - 7\text{i}}{1 - \sqrt{2} - 2\text{i}} = \frac{(-\sqrt{2} - 7\text{i})(1 - \sqrt{2} + 2\text{i})}{(1 - \sqrt{2})^2 + 2^2} = \frac{-\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}\text{i} - 7(1 - \sqrt{2})\text{i} + 14}{(1 - \sqrt{2})^2 + 2^2}.$$
Or, $-2\sqrt{2} - 7(1 - \sqrt{2}) = -7 + 5\sqrt{2} \approx 0{,}07$ donc la partie imaginaire de $\frac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}}$ est non nulle ce qui montre que $\frac{z_{\overrightarrow{\text{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\text{AB}}}}$ n'est pas réel. Ainsi, il n'existe pas de réel k tel que $z_{\overrightarrow{\text{AC}}} = kz_{\overrightarrow{\text{AB}}}$ i.e. $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et C ne sont pas alignés.

2. **L'affirmation 2 est FAUSSE.**
Notons $w = -\sqrt{3} + \text{i}$. Alors, $|w| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et on peut écrire
$$w = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}.$$
Dès lors,
$$z = w^8 = \left(2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^8 = 2^8\text{e}^{\text{i}\left(8\times\frac{5\pi}{6}\right)} = 256\text{e}^{\text{i}\frac{20\pi}{3}} = 256\text{e}^{\text{i}\left(3\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = 256\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}.$$
Cette dernière écriture est la forme exponentielle de z donc un argument de z est $\frac{2\pi}{3}$ qui n'est pas égal à $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

3. **L'affirmation 3 est FAUSSE.**
La section du cube par le plan (ACL) est un quadrilatère comme le montre la figure ci-dessous.



4. **L'affirmation 4 est VRAIE.**
La droite (BF) est orthogonale aux deux droites (FE) et (FG) car ABFE et BFGC sont des carrés. Or, (FE) et (FG) sont deux droites sécantes du plan (EFG) donc (BF) est orthogonale à ce plan. Il s'ensuit que (BF) est orthogonale à toute droite de ce plan. Or, L et M sont deux points de la face EFGH donc (LM) est incluse dans la plan (EFG) et, par suite, (BF) est orthogonale à (LM).

Exercice 4

1. Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$ donc, pour tout réel $x > 0$, $\frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ i.e. $f(x) \leqslant g(x)$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située en dessous (au sens large) de la courbe } \mathscr{C}_g}$. De plus, les courbes se coupent si et seulement si $\sin(x) = 1$ i.e. si et seulement si $x = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

2. Le point A a une abscisse de la forme $x_\text{A} = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Comparons les coefficients directeurs des droites T_f et T_g.
   La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$
   donc le coefficient directeur de T_f est
   $$m_f = f'(x_\text{A}) = \frac{x_\text{A}\cos(x_\text{A}) - \sin(x_\text{A})}{x_\text{A}^2}.$$
   Or, $x_\text{A} = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ donc, par $2\pi-$périodicité des fonctions cosinus et sinus, $\cos(x_\text{A}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(x_\text{A}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc $m_f = -\frac{1}{x_\text{A}^2}$.
   Par ailleurs, la fonction g est la fonction inverse restreinte à $]0\,;+\infty[$ donc g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc, le coefficient directeur de T_g est $m_g = -\frac{1}{x_\text{A}^2} = m_f$.
   Ainsi, T_f et T_g ont le même coefficient directeur donc elles sont parallèles. Mais, de plus, par définition, T_f et T_g passent toutes les deux par le point A donc $\boxed{T_f \text{ et } T_g \text{ sont confondues}}$.

Exercice 5 (enseignement spécifique)

Partie A. — Conjectures

1. On a rentré `=3*B2-2*A2+3` dans la cellule B3 et `=3^A3` dans la cellule C3.
2. À partir du tableau, on peut conjecturer que (u_n) tend vers $+\infty$. De plus, le calcul donne $\dfrac{u_{10}}{v_{10}} \approx 2{,}0005$, $\dfrac{u_{11}}{v_{11}} \approx 2{,}00006$, $\dfrac{u_{12}}{v_{12}} \approx 2{,}00002$ et $\dfrac{u_{13}}{v_{13}} \approx 2{,}000008$ donc on peut conjecturer que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 2.

Partie B. — Étude de la suite (u_n)

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2 \times 3^n + n - 1$ ».
   D'une part, $u_0 = 1$ et, d'autre part, $2 \times 3^0 + 0 - 1 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie i.e. que $u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} + (k+1) - 1$ soit $u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} + k$. Or,
   $$u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3 = 3(2 \times 3^k + k - 1) - 2k + 3 = 2 \times 3^{k+1} + 3k - 3 - 2k + 3 = 2 \times 3^{k+1} + k$$
   donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
   On a ainsi démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times 3^n + n - 1}$.
2. Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times 3^n = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.
3. En tabulant les valeurs de (u_n) à l'aide de la calculatrice, on observe que, pour tout entier naturel $n \leqslant 14$, $u_n < 10^7$ et $u_{15} \approx 28\,697\,828 > 10^7$ donc <u>le rang du premier terme de la suite supérieur à 10 millions est 15</u>.

Partie C. — Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{2\times 3^n+n-1}{3^n} = 2 + \frac{n-1}{3^n}$ donc

$$t_{n+1} - t_n = 2 + \frac{n+1-1}{3^{n+1}} - \left(2 + \frac{n-1}{3^n}\right) = \frac{n}{3^{n+1}} - \frac{n-1}{3^n} = \frac{n-3(n-1)}{3^{n+1}} = \frac{3-2n}{3^{n+1}}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} > 0$ donc le signe de $t_{n+1} - t_n$ est celui de $3-2n$. De plus, $3-2n < 0$ si et seulement si $3 < 2n$ i.e. $n > \frac{3}{2}$ donc, pour tout $n \geqslant 2$, $t_{n+1} - t_n < 0$ ce qui nous permet de conclure que $\boxed{(t_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 2}$.

2. On a vu dans la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 + \frac{n-1}{3^n}$ i.e. $\frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3^n}$. Or, d'après l'énoncé, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant \frac{n}{3^n} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0$. De plus, comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$. On conclut, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 2}$.

Exercice 5 (enseignement de spécialité)

Partie A. — Conjectures

1. On a rentré `=B2+C2` dans la cellule B3 et `=4*B2+C2` dans la cellule C3.

2. À partir du tableau et à l'aide de la calculatrice, on trouve que, pour tout entier $n \leqslant 6$, $\mathrm{PGCD}(a_n\,;b_n) = 1$ et que, pour tout entier $n \leqslant 5$, $\mathrm{PGCD}(a_n\,;a_{n+1}) = 1$. On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{PGCD}\,(a_n\,;b_n) = \mathrm{PGCD}\,(a_n\,;a_{n+1}) = 1$.

3. a. Pour a_{10} et b_{10}, les divisions successives sont :

$$88\,573 = 44\,287 + 44\,286$$
$$44\,287 = 44\,286 + 1$$

donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(a_{10}\,;b_{10}) = 1}$. Pour a_{10} et a_{11}, les divisions successives sont :

$$132\,860 = 2 \times 44\,287 + 44\,286$$
$$44\,287 = 44\,286 + 1$$

donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(a_{10}\,;a_{11}) = 1}$.

b. D'après le tableau, $\frac{b_{10}}{a_{10}} \approx 1{,}99998$, $\frac{b_{11}}{a_{11}} \approx 2{,}000008$, $\frac{b_{12}}{a_{12}} \approx 1{,}999997$ et $\frac{b_{13}}{a_{13}} \approx 2{,}0000008$ donc on peut conjecturer que la suite $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ tend vers 2.

Partie B. — Étude arithmétique

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition « $\mathcal{P}(n)$: $2a_n - b_n = (-1)^n$ ».
D'une part, $2a_0 - b_0 = 2 \times 1 - 1 = 1$ et, d'autre part, $(-1)^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors,

$$2a_{k+1} - b_{k+1} = 2(a_k + b_k) - (4a_k + b_k) = -2a_k + b_k = -(2a_k - b_k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
On a ainsi démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2a_n - b_n = (-1)^n}$.

2. Notons $d_n = \mathrm{PGCD}\,(a_n\,;b_n)$. Alors, d_n divise a_n et b_n donc d_n divise $2a_n - b_n$ i.e. d_n divise $(-1)^n$. Or, $d_n > 0$ et le seul diviseur positif de $(-1)^n$ est 1 donc $d_n = 1$.
Notons $\delta_n = \mathrm{PGCD}(a_n\,;a_{n+1})$. Alors, δ_n divise a_n et δ_n divise $a_{n+1} - a_n = b_n$ donc δ_n divise d_n. Or, $\delta_n > 0$ et $d_n = 1$ donc $\delta_n = 1$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{PGCD}\,(a_n\,;b_n) = \mathrm{PGCD}(a_n\,;a_{n+1}) = 1}$.

Partie C. — Étude matricielle

1. **a.** Le déterminant de P est $\det P = 2 \times (-2) - 4 \times 1 = -8 \neq 0$ donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $P^{-1}X_0 = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ donc

$$D^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ 2(-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \times 3^{n+1} + 2(-1)^n \\ 4 \times 3^{n+1} - 4(-1)^n \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{2 \times 3^{n+1} + 2(-1)^n}{8} \\ b_n = \dfrac{4 \times 3^{n+1} - 4(-1)^n}{8} \end{cases}$ i.e. $\boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} \\ b_n = \dfrac{3^{n+1} - (-1)^n}{2} \end{cases}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{3^{n+1} - (-1)^n}{2} \times \frac{4}{3^{n+1} + (-1)^n} = 2 \times \frac{3^{n+1} - (-1)^n}{3^{n+1} + (-1)^n} = 2 \times \frac{3^n(3 - (-\frac{1}{3})^n)}{3^n(3 + (-\frac{1}{3})^n)} = 2 \times \frac{3 - (-\frac{1}{3})^n}{3 + (-\frac{1}{3})^n}.$$

Or, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\frac{1}{3})^n = 0$. Par somme, différence et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3 - (-\frac{1}{3})^n}{3 + (-\frac{1}{3})^n} = \frac{3}{3} = 1$ et donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 2}$.