Devoir commun de mathématiques

Sujet B

Durée : 2 heures

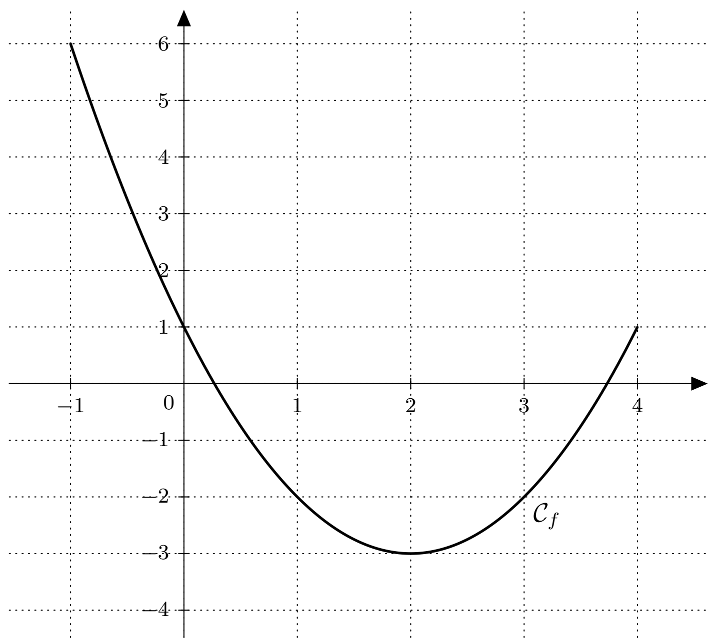
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Vous devez écrire lisiblement en en-tête de votre copie : Nom, Prénom, Classe et Sujet B

Exercice 1 — 5,5 points

On considère la fonction f définie sur $D = [-1\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Partie A. — Lectures graphiques

On demande de répondre aux questions de cette partie par lectures graphiques. Les réponses seront données avec la précision permise par le graphique.

1. Déterminer $f(0)$ et $f(4)$.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de -2 par f.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -3$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur D.
7. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D ainsi que les valeurs de x en lesquelles ces extremums sont atteints.
8. Déterminer le maximum de f sur $[0\,;4]$ ainsi que les valeurs de x en lesquelles ce maximum est atteint.

Partie B. — La fonction f étudiée précédemment est définie sur D par $f(x) = (x-2)^2 - 3$. On se propose de retrouver et de compléter certains résultats obtenus dans la partie A.
On demande de répondre aux questions de cette partie en utilisant seulement l'expression de f et sans utiliser la représentation graphique ci-dessus.

1. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à D, $f(x) = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.
2. **a.** Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 0$.
   b. Comparer les résultats obtenus avec ceux de la question 3 de la partie A. Quels commentaires pouvez-vous faire sur chacune des deux méthodes (méthode graphique et méthode calculatoire) ?
3. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq -3$.

Exercice 2 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On prendra comme unité graphique 1 cm.
On considère les points A $(-3\,;1)$, B $(-1\,;5)$, C $(6\,;4)$ et $\Omega\,(2\,;1)$.

1. Faire une figure qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre Ω dont on précisera le rayon. Construire ce cercle.
3. Soit D le point de coordonnées $(7\,;1)$.
   Justifier que Ω est le milieu de [AD].
   Que peut-on en déduire concernant le triangle ABD ?
4. **a.** En utilisant les vecteurs, déterminer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère ABDE soit un parallélogramme.
   b. Prouver que ABDE est un rectangle.
5. On note P le point de coordonnées $(0\,;2)$. On admet que P $\in$ [AC].
   Que représente la droite (BP) pour le triangle ABC ? On justifiera sa réponse avec soin.

Exercice 3 — 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A. — QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse. Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point. L'absence de réponse, ou le fait de donner plusieurs réponses pour une même question, n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Indiquer, sur votre copie, le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.

1. La forme développée de $(2x+1)^2$ est :

   A) $4x^2+1$ B) $4x^2+4x+1$ C) $2x^2+4x+1$.

2. La forme factorisée de $(2x+1)(3x+2)+2x+1$ est :

   A) $(2x+1)(3x+2)$ B) $(2x+1)(5x+3)$ C) $3(2x+1)(x+1)$.

3. La forme développée de $(2x+5)(x-1)$ est :

   A) $2x^2+5x-5$ B) $2x^2+3x-5$ C) $3x+4$.

4. La forme factorisée de $\frac{1}{4}+x+x^2$ est :

   A) $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$ C) $\left(\frac{1}{4}+x\right)^2$.

Partie B. — On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre réel distinct de -3
	q est un nombre réel
Entrée :	Saisir n
Traitement :	q prend la valeur $(n+2)(n+2)$
	q prend la valeur $q-(n+4)$
	q prend la valeur $\dfrac{q}{n+3}$
Sortie :	Afficher q

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 4$ puis pour $n = 7$. On détaillera l'ensemble des étapes de calcul.
2. Emettre une conjecture sur le résultat fourni par cet algorithme.
3. Démontrer algébriquement cette conjecture.

Exercice 4 **4,5 points**

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux rouges, une verte et une jaune.
On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de cette boule, on la replace dans l'urne et on procède à un second tirage. On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Représenter l'expérience par un arbre en notant R_1 et R_2 les deux boules rouges, V la boule verte et J la boule jaune.
2. Soit E l'événement « les deux boules tirées sont rouges » et F l'événement « une seule des deux boules tirées est rouge ».
   A l'aide de l'arbre, déterminer les probabilités des événements E et F.
3. Définir par une phrase l'événement $\mathrm{G} = \mathrm{E} \cup \mathrm{F}$.
   Calculer la probabilité de G.
4. On considère l'événement H : « aucune des boules tirées n'est rouge ». Exprimer H à l'aide de G et en déduire la probabilité de H.
5. Les boules de l'urne portent un numéro : les rouges portent toutes les deux le numéro 1, la verte le numéro 2 et la jaune le numéro 4.
   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules.
   Déterminer, en justifiant sa réponse, la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4. (On pourra s'aider de l'arbre construit à la question 1).