Devoir commun de mathématiques

SUJET A

Durée : 2 heures
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 3 exercices.

EXERCICE 1 — 10 points

Partie A. — Dans cette partie, les réponses seront données avec la précision permise par le graphique.
Soit f la fonction définie sur $[-3\,;5]$ et représentée par la courbe donnée en annexe (page 3).

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image de 0 et l'image de 2 par f.
   b. Déterminer graphiquement les antécédents de 0 et de -2 par f.
2. **a.** Dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;5]$.
   b. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-3\,;5]$ ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.
3. **a.** Résoudre graphiquement $f(x) = -5$.
   b. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 3$.
   c. Soit $x \in [-2\,;3]$. Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$.
4. Soit g la fonction définie sur $[-3\,;5]$ par $g(x) = 2x + 1$.
   a. Tracer, sur le graphique de l'annexe (page 3), la courbe représentative de g.
   b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
   c. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Partie B. — La fonction f étudiée dans la partie A est la fonction définie sur $[-3\,;5]$ par $f(x) = 4 - (x-1)^2$.

1. Soit $x \in [-3\,;5]$.
   a. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
   b. En factorisant $f(x)$, démontrer que $f(x) = (x+1)(-x+3)$.
2. Calculer $f(2)$ et $f(-\sqrt{3})$.
3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par f.
4. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 3$.
5. On rappelle que g est définie sur $[-3\,;5]$ par $g(x) = 2x+1$. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 2 — 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A. — Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A$(0\,;-1)$, B$(2\,;5)$, C$(-1\,;1)$ et D$(3\,;3)$.

1. **a.** Sur l'annexe (page 4), faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
   b. Calculer les coordonnées du milieu K de [AB].
   c. Vérifier que K est aussi le milieu de [CD].
   d. En déduire la nature du quadrilatère ADBC.
2. On considère le point E symétrique de A par rapport à C.
   a. Calculer les coordonnées de E.
   b. Montrer que AE $= \sqrt{20}$.
3. On admet que AB $= 2\sqrt{10}$ et BE $= 2\sqrt{5}$. (On ne demande donc pas de démontrer ces égalités.)
   a. Montrer que le triangle ABE est rectangle.
   b. En déduire le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABE.
   c. Construire ce cercle $(\mathcal{C})$.

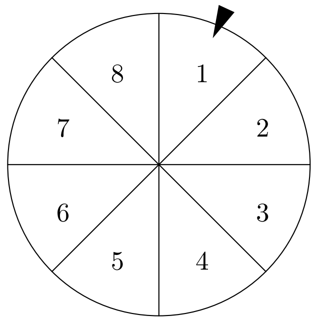
Partie B. — Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(-1 ; 6), B(-5 ; 4) et C(3 ; 4).

1. Sur l'annexe (page 4), faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
4. Construire le point E, image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
5. Quel est la nature du quadrilatère ABEC ? (Justifier.)
6. Démontrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$ et en déduire la position de C sur le segment [DE].

Exercice 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Dans le tableau donné en annexe (page 3), entourer, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. L'absence de réponse, ou le fait de donner plusieurs réponses pour une même question, n'enlève ni ne rapporte aucun point. Les quatre parties sont indépendantes.

Partie A. — Lors d'une tombola, on fait tourner une roue parfaitement équilibrée représentée ci-dessous. Les 8 secteurs sont identiques. On lit le numéro en face du repère lorsque la roue s'arrête.



On considère les événements A : « Le numéro est strictement supérieur à 4 » et B : « Le numéro est pair ».

1. La probabilité de l'événement $A \cap B$ est : a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$.
2. La probabilité de l'événement $A \cup B$ est : a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1.
3. La probabilité de l'événement $\overline{A}$ est : a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$.

Partie B. — On désigne par A et B des événements définis sur un univers Ω et par P une probabilité sur Ω.

4. Si A et B sont incompatibles, si $P(A) = 0{,}43$ et $P(B) = 0{,}15$ alors la probabilité de $A \cup B$ est :

   a) 0,0645 b) 0,58 c) 0,28.

5. Si $P(A) = 0{,}6$ et $P(\overline{B}) = 0{,}7$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$ alors :

   a) $P(A \cap B) = 0{,}1$ b) $P(A \cap B) = 0{,}5$ c) ces valeurs ne sont pas possibles.

6. On lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

   a) 0,33 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$.

Partie C

7. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $25x^2 - 81 = 0$ est :

   a) $S = \left\{\frac{81}{25}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{9}{5}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{9}{5} ; -\frac{9}{5}\right\}$.

8. La forme développée de $(3x+1)(x-5)$ est :

   a) $4x - 4$ b) $3x^2 - 5$ c) $3x^2 - 14x - 5$.

9. La forme factorisée de $(2x+3)(x+4) - (x+4)$ est :

   a) $(x+4)(x-1)$ b) $(x+4)(2x+2)$ c) $(x+4)(2x+3)$.

Partie D. — On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir A
Traitement :	B prend la valeur $3 \times A + 2$
	A prend la valeur $B^2 - 25$
	B prend la valeur $A + B$
Sortie :	Afficher B.

10. Si on donne la valeur 2 en entrée à A alors l'algorithme affiche en sortie :

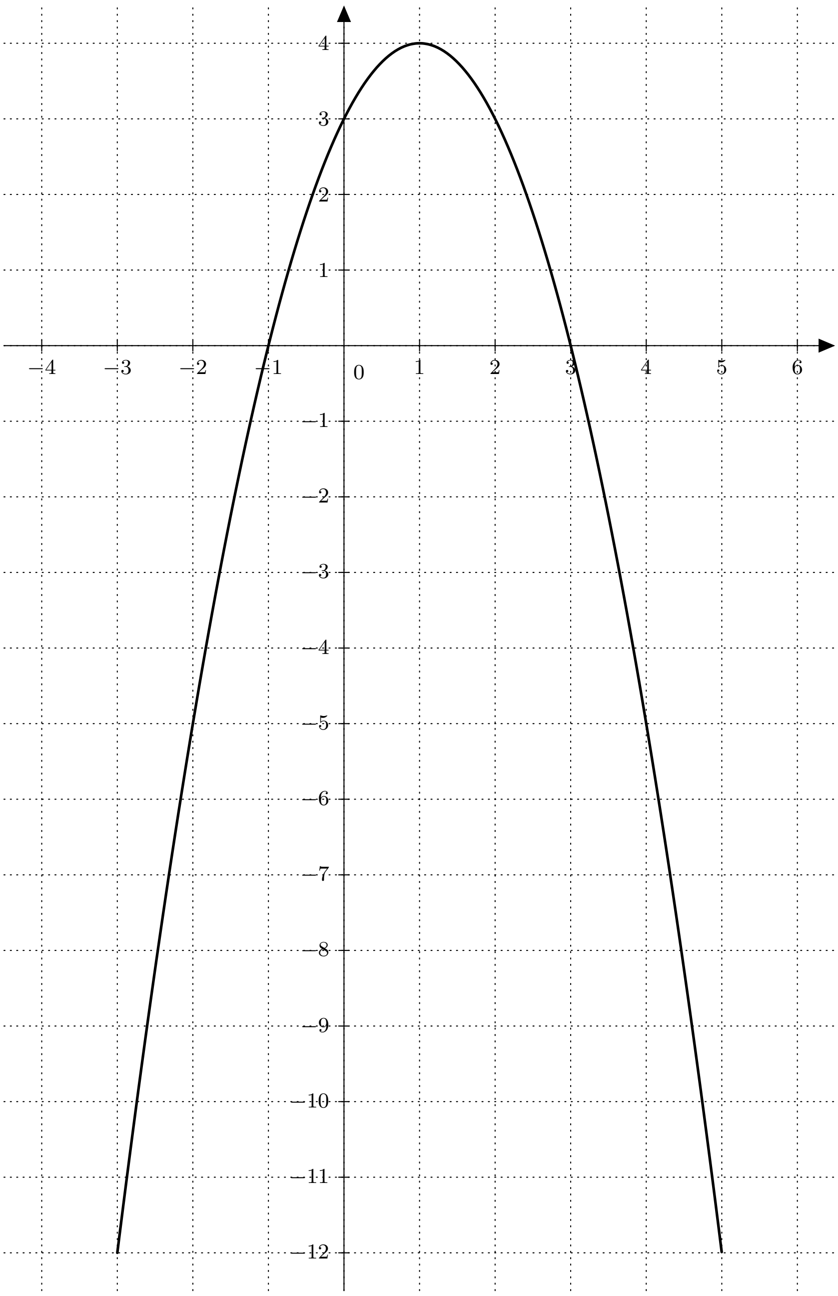
    a) 47 b) 41 c) 8

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

ANNEXE

A DETACHER ET A RENDRE AVEC SA COPIE

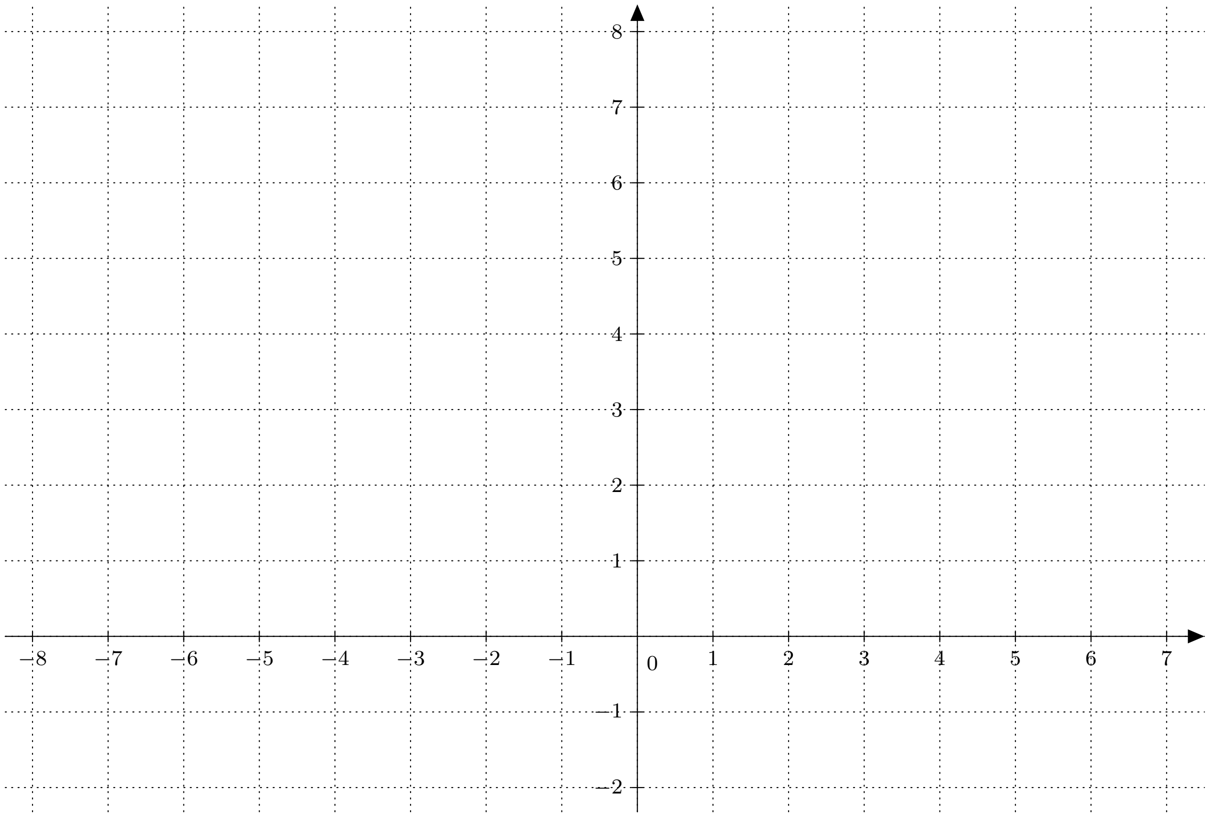
Exercice 1



Exercice 3

Partie A	Question 1	a	b	c
	Question 2	a	b	c
	Question 3	a	b	c
Partie B	Question 4	a	b	c
	Question 5	a	b	c
	Question 6	a	b	c
Partie C	Question 7	a	b	c
	Question 8	a	b	c
	Question 9	a	b	c
Partie D	Question 10	a	b	c

Exercice 2 – Partie A



Exercice 2 – Partie B